Светуньков И.С.

Экономико-математические модели и их интерпретация на примере модели Брауна

Великий физик Гиббс был очень замкнутым человеком и обычно молчал на заседаниях ученого совета университета, в котором он преподавал. Но на одном из заседаний этого совета, когда решался вопрос о том, уделять ли в новых учебных программах больше места математике или иностранным языкам, он не выдержал и произнес речь:

- Математика – это язык! - сказал он.

Сборник «Физики шутят».

Действительно, математика – это язык, и так же, как и любой другой язык, она позволяет описать практически любые процессы и явления, происходящие в мире. Одной важной особенностью любого языка является то, что предложения, составленные на этом языке, можно сформулировать таким образом, что их трактовка будет различаться. Например, смысловая нагрузка в предложениях: «Я читаю статью», «Статью читаю я» или «Читаю я статью» - разная, несмотря на то, что слова в них используются одинаковые. Так же и в математике: можно одну и ту же формулу представить по-разному, в связи, с чем ей можно будет дать разную трактовку. Рассмотрим, какие трактовки можно дать одной и той же модели на примере модели Брауна (известной так же под названием «модель экспоненциального сглаживания»).

Идея модели Брауна заключается в том, что прогнозное значение формируется на основе предыдущих фактических с разными весами [Лукашин, стр. 17]:

$$\hat{Y}_{t+1} = v_0 Y_t + v_1 Y_{t-1} + v_2 Y_{t-2} + \ldots + v_n Y_{t-n} = \sum_{i=0}^{n} v_i Y_{t-i} , \qquad (1)$$

которые задаются по экспоненциальном закону, в соответствии с правилом:

$$v_i = \alpha (1-\alpha)^i , \qquad (2)$$

где, $\hat{Y}_{t+1}$ - прогнозное значение параметра на наблюдении t+1, Y_t - фактическое значение параметра на наблюдении t, α – постоянная сглаживания, i – номер наблюдения с конца. Подставим (2) в (1), получим:

$$\hat{Y}_{t+1} = \sum_{i=0}^{n} \alpha (1-\alpha)^i Y_{t-i} = \alpha Y_t + \alpha (1-\alpha) Y_{t-1} + \alpha (1-\alpha)^2 Y_{t-2} + \ldots + (1-\alpha)^n Y_{t-n} . \qquad (3)$$

В методе Брауна сумма весов представляет собой ряд геометрической прогрессии, в пределе (при $i \to \infty$) сходящийся к 1:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i = \alpha + \alpha (1-\alpha) + \alpha (1-\alpha)^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha (1-\alpha)^i = 1 , \qquad (4)$$

если выполняется условие: $|1-\alpha| < 1$, откуда со всей очевидностью следует ограничение на постоянную сглаживания $\alpha \in (0 ; 2)$ [Светуньков, стр. 9].

Модель (3) обычно трактуют как модель, в которой прогнозное значение формируется как среднее всех фактических значений с весами, заданными по экспоненциальному закону (то есть вес значения на новом наблюдении больше веса значения на старом наблюдении). Эта трактовка представлена графически на Рис. 1: каждому наблюдению: II, III, IV,… – сопоставляются веса: α , $\alpha (1-\alpha)$, $\alpha (1-\alpha)^2$, … – которые формируют прогнозное значение I.

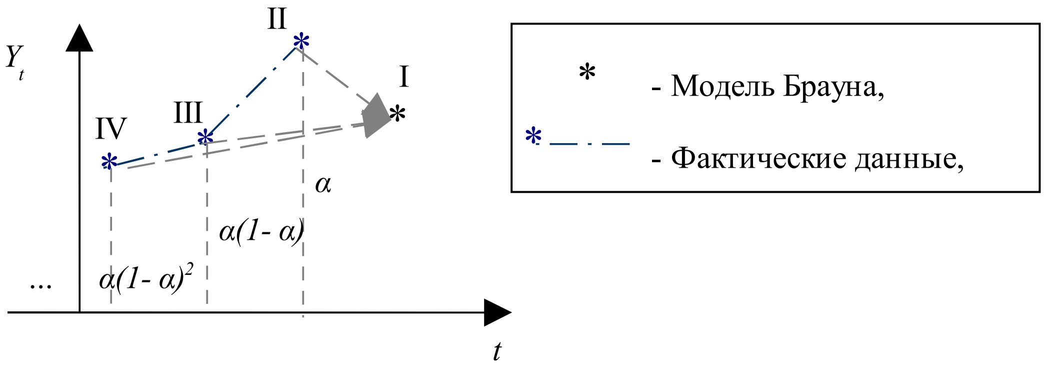

Рис. 1. Графическое представление механизма формирования прогноза в модели (3).

Некоторые вопросы и недопонимание у исследователей в таком представлении модели вызывает значение α, большее 1. Действительно, если, например, $\alpha=1{,}5$, то веса для ряда наблюдений будут складываться таким образом:

$$\hat{Y}_{t+1}=1{,}5\,Y_t+1{,}5(-0{,}5)\,Y_{t-1}+1{,}5(-0{,}5)^2\,Y_{t-2}+\dots \qquad (5)$$

или, что равнозначно:

$$\hat{Y}_{t+1}=1{,}5\,Y_t-0{,}75\,Y_{t-1}+0{,}375\,Y_{t-2}+\dots \qquad (6)$$

Ряд весов получается знакочередующимся, в пределе сходящийся к единице:

$$1{,}5-0{,}75+0{,}375+\dots=1\,, \qquad (7)$$

однако экономический смысл того, что у одних наблюдений веса больше единицы, а у других – меньше нуля, многим непонятен. Впрочем, если данную модель рассматривать не как «модель средних взвешенных величин», а как своеобразную авторегрессию, то вопросов становится значительно меньше. В таком случае прогнозируемое значение просто зависит от предыдущих наблюдений в соответствии с правилом (6).

Стоит, однако, отметить, что ограничение коэффициента α по большому счёту имеет смысл только в том случае, когда количество наблюдений бесконечно. На практике это невозможно, поэтому ряд всех весов никогда в реальности к единице не сходится. В этой ситуации вообще все рассуждения о том, что альфа надо как-то ограничивать ставятся под вопрос.

Чтобы взглянуть на метод Брауна с другой стороны рассмотрим его более компактную и популярную форму. Ведь, если в формуле (3) вынести в правой части за скобки $1-\alpha$, мы получим:

$$\hat{Y}_{t+1}=\alpha Y_t+(1-\alpha)\left(\alpha Y_{t-1}+\alpha(1-\alpha)\,Y_{t-2}+\dots\right). \qquad (8)$$

Можно заметить, что в скобках в правой части фактически задано прогнозное значение на наблюдении t:

$$\hat{Y}_t=\alpha Y_{t-1}+\alpha(1-\alpha)\,Y_{t-2}+\dots \qquad (9)$$

Соответственно, используя (9), формулу (8) можно переписать в более компактном виде:

$$\hat{Y}_{t+1}=\alpha Y_t+(1-\alpha)\,\hat{Y}_t\,. \qquad (10)$$

Именно в таком виде модель Брауна и стала популярной, и именно в таком виде появляется соблазн дать коэффициенту следующую экономическую интерпретацию (которая превалирует в следе экономистов): α представляет собой некоторую среднюю взвешенную, служащую для формирования прогнозного значения. То есть прогноз складывается из двух частей: из части фактического значения, полученного на наблюдении t и части, спрогнозированной на наблюдение t. В такой трактовке, очевидно, что $\alpha \in (0;1)$, так как подразумевается наличие средней между двумя значениями, и именно этой трактовки модели придерживаются многие экономисты. Графически формирование прогнозного значения в соответствии с моделью (10) представлено на Рис. 2: точка III считается как средневзвешенная фактического значения I и прогнозного II, её значение как раз и становится прогнозом – точкой IV. Далее берётся средневзвешенная между точками IV и V, получается новая средняя (точка VI) и новый прогноз (точка VII) и так далее. Причём α в данной интерпретации регулирует распределение весов между фактом и прогнозом.

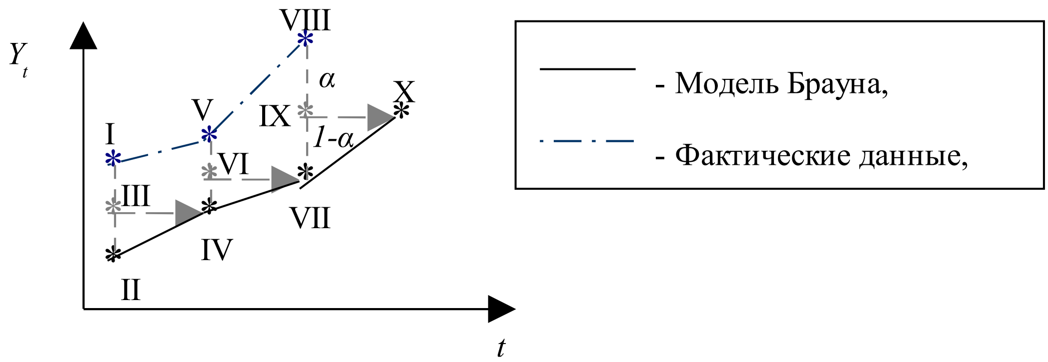

Рис. 2. Графическое представление механизма формирования прогноза в модели (10).

Однако мы в данном случае сталкиваемся с ситуацией, в которой трактовка модели её только ограничивает. Покажем, каким образом это происходит.

Если мы раскроем скобки в правой части (10):

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1-\alpha)\hat{Y}_t = \alpha Y_t + \hat{Y}_t - \alpha \hat{Y}_t \,, \tag{11}$$

после чего вынесем за скобки α, то получим формулу, математически абсолютно идентичную формуле (10), но имеющую уже другую трактовку:

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \alpha\left(Y_t - \hat{Y}_t\right) . \tag{12}$$

Здесь прогнозное значение формируется на основе предыдущего спрогнозированного, а α выступает некоторым коэффициентом адаптации модели к новой поступающей информации (так как в скобках в (12) у нас представлено отклонение факта от прогноза). В таком случае степень адаптации может быть, в общем-то, любой: модель может адаптироваться незначительно и отсеивать поступающие «шумы» (когда альфа мал, например, составляет 0,3) или достаточно быстро адаптироваться к поступающей информации в случае, когда в процессе происходят качественные изменения (когда альфа больше 1, например, составляет 1,7). Графическое представления этой трактовки дано на Рис. 3.

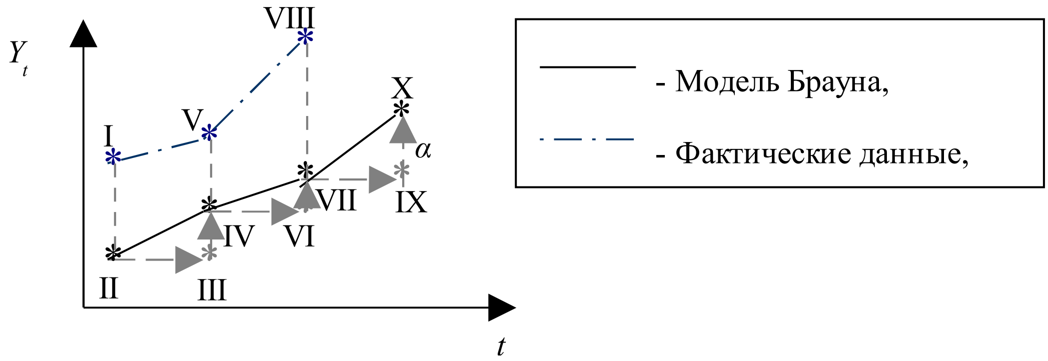

Рис. 3. Графическое представление механизма адаптации в модели (12).

Здесь расчётное значение II берётся за базу для прогноза на следующем наблюдении и переносится в точку III, которая затем корректируется на величину отклонения фактического значения I от расчётного II. В итоге прогнозное значение из точки III «переходит» в точку IV, которая в свою очередь становится базой для следующего прогноза (точка VI) и так далее. α в этой интерпретации выступает константой, регулирующей скорость адаптации, то есть то, на какую величину произойдёт корректировка модели (например, из точки III в точку IV).

Исследования, проведённые с 1993 по 2005 год, поддержанные Российским фондом фундаментальных исследований, показали, что, когда перед исследователем стоит задача прогнозирования нестационарного процесса, модель Брауна даёт лучшие результаты в случае с $\alpha > 1$ [Светуньков, стр. 28].

Для того чтобы закончить рассмотрение различных вариантов интерпретации одной и той же модели Брауна, введём коэффициент η, такой, что:

$$\alpha = 1 + \eta \ . \tag{13}$$

Если $\alpha \in (0\,;2)$, то, естественно, что $\eta \in (-1\,;1)$. С учётом условия (13) мы можем модифицировать модель Брауна (12):

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + (1+\eta)\left(Y_t - \hat{Y}_t\right) \ . \tag{14}$$

Раскрыв скобки в (14) и проведя элементарные преобразования, получим следующую модель:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t + \eta\left(Y_t - \hat{Y}_t\right) \ . \tag{15}$$

Эта модель тождественна моделям (10) и (12), однако благодаря такому представлению, трактовать её можно несколько иначе. В ней прогнозное значение на шаге t+1 полностью учитывает фактическое значение на наблюдении t, и корректируется на величину отклонения пропорционально η. Графически этот механизм может быть представлен так, как это показано на Рис. 4. По своей логике этот механизм напоминает описанный для Рис. 3, однако у него есть некоторые отличия. Так модель изначально формируется исходя из данного фактического значения (значение точки I переносится на следующее наблюдение в точку III), которое затем корректируется на величину отклонения факта (точка I) от прогноза (точка II) на предыдущем наблюдении. η в этой интерпретации выступает константой, не только регулирующей величину корректировки, но ещё и определяющей направление корректировки. То есть она характеризует то, на какую величину, и в какую сторону произойдёт корректировка модели (например, из точки VI вниз, в точку VII).

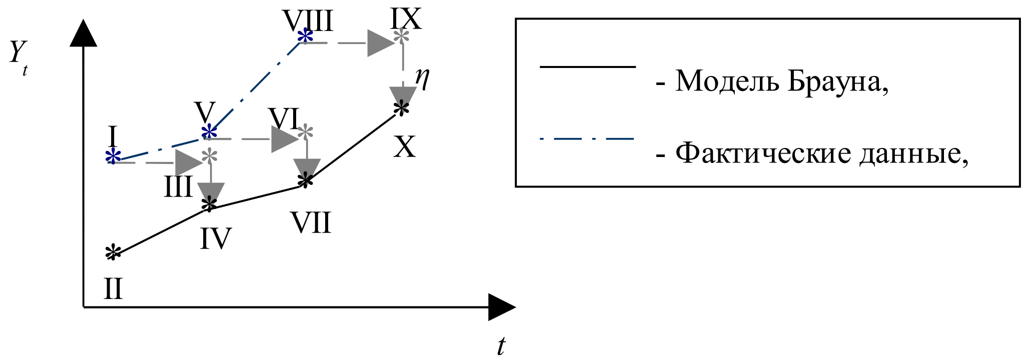

Рис. 4. Графическое представление механизма адаптации в модели (15).

Как видим, вне зависимости от того, каким образом мы группируем переменные в модели, прогноз не меняется, модель Брауна даёт одни и те же результаты в любых формах её записи, однако меняется экономическая интерпретация её коэффициентов, в результате чего некоторые исследователи накладывают те или иные ограничения на модель. Это явление достаточно часто встречается в экономико-математическом моделировании: желание дать трактовку той или иной модели, тому или иному показателю, ограничивает саму модель, в результате чего она начинает работать хуже.

Есть ещё одна сторона экономико-математического моделирования, связанная с трактовкой полученных результатов, которая достаточно часто встречается в экономической теории: у экономистов всегда есть соблазн поставить знак равенства между реальным объектом и построенной моделью, в результате чего реальный объект в сознании людей наделяется свойствами, имеющимися лишь у модели, которыми он на самом деле не обладает. Однако рассмотрение этой стороны экономико-математического моделирования выходит за рамки данной статьи.

Список используемой литературы

1. Лукашин Ю.П., Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2003.
2. Светуньков С.Г., Бутуханов А.В., Светуньков И.С., Запредельные случаи метода Брауна в экономическом прогнозировании. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006.