

Светуньков И.С.

## Экономико-математические модели и их интерпретация на примере модели Брауна

*Великий физик Гиббс был очень замкнутым человеком и обычно молчал на заседаниях ученого совета университета, в котором он преподавал. Но на одном из заседаний этого совета, когда решался вопрос о том, уделять ли в новых учебных программах больше места математике или иностранным языкам, он не выдержал и произнес речь:*

*- Математика – это язык! - сказал он.*

*Сборник «Физики шутят».*

Действительно, математика – это язык, и так же, как и любой другой язык, она позволяет описать практически любые процессы и явления, происходящие в мире. Одной важной особенностью любого языка является то, что предложения, составленные на этом языке, можно сформулировать таким образом, что их трактовка будет различаться. Например, смысловая нагрузка в предложениях: «Я читаю статью», «Статью читаю я» или «Читаю я статью» - разная, несмотря на то, что слова в них используются одинаковые. Так же и в математике: можно одну и ту же формулу представить по-разному, в связи, с чем ей можно будет дать разную трактовку. Рассмотрим, какие трактовки можно дать одной и той же модели на примере модели Брауна (известной так же под названием «модель экспоненциального сглаживания»).

Идея модели Брауна заключается в том, что прогнозное значение формируется на основе предыдущих фактических с разными весами [Лукашин, стр. 17]:

$$\hat{Y}_{t+1} = v_0 Y_t + v_1 Y_{t-1} + v_2 Y_{t-2} + \dots + v_n Y_{t-n} = \sum_{i=0}^n v_i Y_{t-i}, \quad (1)$$

которые задаются по экспоненциальному закону, в соответствии с правилом:

$$v_i = \alpha (1 - \alpha)^i, \quad (2)$$

где,  $\hat{Y}_{t+1}$  - прогнозное значение параметра на наблюдении  $t+1$ ,  $Y_t$  - фактическое значение параметра на наблюдении  $t$ ,  $\alpha$  – постоянная сглаживания,  $i$  – номер наблюдения с конца. Подставим (2) в (1), получим:

$$\hat{Y}_{t+1} = \sum_{i=0}^n \alpha (1 - \alpha)^i Y_{t-i} = \alpha Y_t + \alpha (1 - \alpha) Y_{t-1} + \alpha (1 - \alpha)^2 Y_{t-2} + \dots + (1 - \alpha)^n Y_{t-n}. \quad (3)$$

В методе Брауна сумма весов представляет собой ряд геометрической прогрессии, в пределе (при  $i \rightarrow \infty$ ) сходящийся к 1:

$$\sum_{i=0}^{\infty} v_i = \alpha + \alpha(1 - \alpha) + \alpha(1 - \alpha)^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha(1 - \alpha)^i = 1, \quad (4)$$

если выполняется условие:  $|1 - \alpha| < 1$ , откуда со всей очевидностью следует ограничение на постоянную сглаживания  $\alpha \in (0; 2)$  [Светуньков, стр. 9].

Модель (3) обычно трактуют как модель, в которой прогнозное значение формируется как среднее всех фактических значений с весами, заданными по экспоненциальному закону (то есть вес значения на новом наблюдении больше веса значения на старом наблюдении). Эта трактовка представлена графически на Рис. 1: каждому наблюдению: II, III, IV, ... – сопоставляются веса:  $\alpha$ ,  $\alpha(1 - \alpha)$ ,  $\alpha(1 - \alpha)^2$ , ... – которые формируют прогнозное значение I.

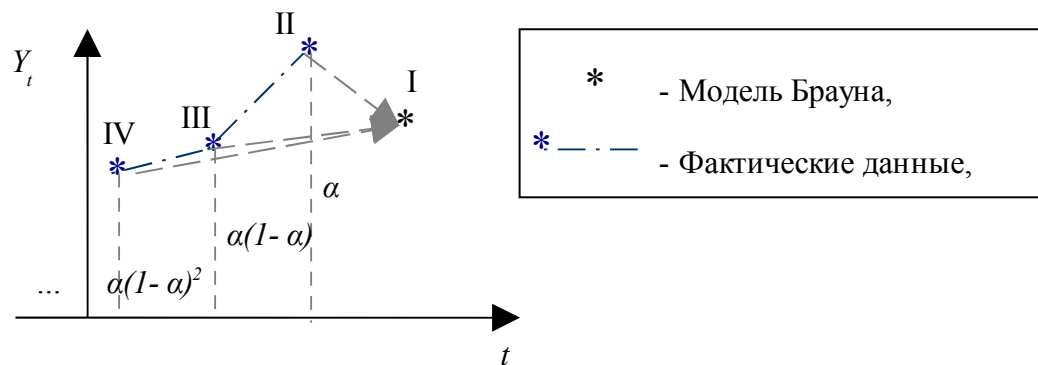


Рис. 1. Графическое представление механизма формирования прогноза в модели (3).

Некоторые вопросы и недопонимание у исследователей в таком представлении модели вызывает значение  $\alpha$ , большее 1. Действительно, если, например,  $\alpha = 1,5$ , то веса для ряда наблюдений будут складываться таким образом:

$$\hat{Y}_{t+1} = 1,5 Y_t + 1,5(-0,5) Y_{t-1} + 1,5(-0,5)^2 Y_{t-2} + \dots \quad (5)$$

или, что равнозначно:

$$\hat{Y}_{t+1} = 1,5 Y_t - 0,75 Y_{t-1} + 0,375 Y_{t-2} + \dots \quad (6)$$

Ряд весов получается знакоперевающимся, в пределе сходящийся к единице:

$$1,5 - 0,75 + 0,375 + \dots = 1, \quad (7)$$

однако экономический смысл того, что у одних наблюдений веса больше единицы, а у других – меньше нуля, многим непонятен. Впрочем, если данную модель рассматривать не как «модель средних взвешенных величин», а как своеобразную авторегрессию, то вопросов становится значительно меньше. В таком случае прогнозируемое значение просто зависит от предыдущих наблюдений в соответствии с правилом (6).

Стоит, однако, отметить, что ограничение коэффициента  $\alpha$  по большому счёту имеет смысл только в том случае, когда количество наблюдений бесконечно. На практике это невозможно, поэтому ряд всех весов никогда в реальности к единице не сходится. В этой ситуации вообще все рассуждения о том, что альфа надо как-то ограничивать ставятся под вопрос.

Чтобы взглянуть на метод Брауна с другой стороны рассмотрим его более компактную и популярную форму. Ведь, если в формуле (3) вынести в правой части за скобки  $1 - \alpha$ , мы получим:

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha)(\alpha Y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha) Y_{t-2} + \dots) \quad (8)$$

Можно заметить, что в скобках в правой части фактически задано прогнозное значение на наблюдении  $t$ :

$$\hat{Y}_t = \alpha Y_{t-1} + \alpha(1 - \alpha) Y_{t-2} + \dots \quad (9)$$

Соответственно, используя (9), формулу (8) можно переписать в более компактном виде:

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha) \hat{Y}_t \quad (10)$$

Именно в таком виде модель Брауна и стала популярной, и именно в таком виде появляется соблазн дать коэффициенту следующую экономическую интерпретацию (которая превалирует в следе экономистов):  $\alpha$  представляет собой некоторую среднюю взвешенную, служащую для формирования прогнозного значения. То есть прогноз складывается из двух частей: из части фактического значения, полученного на

наблюдении  $t$  и части, спрогнозированной на наблюдение  $t$ . В такой трактовке, очевидно, что  $\alpha \in (0; 1)$ , так как подразумевается наличие средней между двумя значениями, и именно этой трактовки модели придерживаются многие экономисты. Графически формирование прогнозного значения в соответствии с моделью (10) представлено на Рис. 2: точка III считается как средневзвешенная фактического значения I и прогнозного II, её значение как раз и становится прогнозом – точкой IV. Далее берётся средневзвешенная между точками IV и V, получается новая средняя (точка VI) и новый прогноз (точка VII) и так далее. Причём  $\alpha$  в данной интерпретации регулирует распределение весов между фактом и прогнозом.

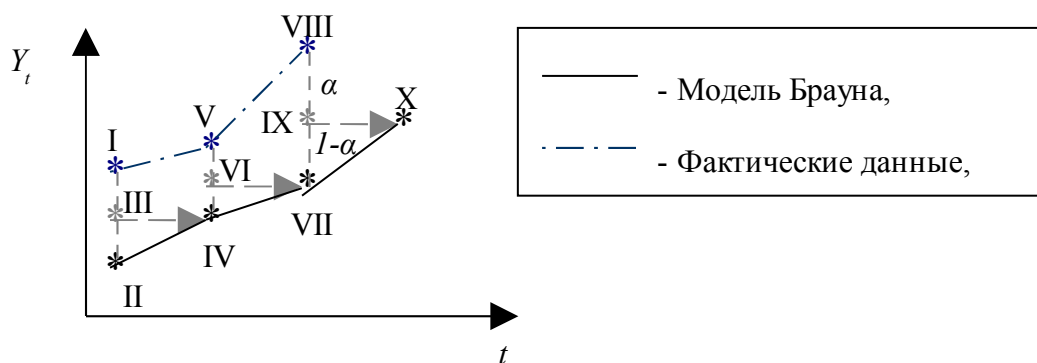


Рис. 2. Графическое представление механизма формирования прогноза в модели (10).

Однако мы в данном случае сталкиваемся с ситуацией, в которой трактовка модели её только ограничивает. Покажем, каким образом это происходит.

Если мы раскроем скобки в правой части (10):

$$\hat{Y}_{t+1} = \alpha Y_t + (1 - \alpha) \hat{Y}_t = \alpha Y_t + \hat{Y}_t - \alpha \hat{Y}_t, \quad (11)$$

после чего вынесем за скобки  $\alpha$ , то получим формулу, математически абсолютно идентичную формуле (10), но имеющую уже другую трактовку:

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + \alpha (Y_t - \hat{Y}_t). \quad (12)$$

Здесь прогнозное значение формируется на основе предыдущего спрогнозированного, а  $\alpha$  выступает некоторым коэффициентом адаптации модели к новой поступающей информации (так как в скобках в (12) у нас представлено отклонение факта от прогноза). В таком случае степень адаптации может быть, в общем-то, любой: модель может адаптироваться незначительно и отсеивать поступающие «шумы» (когда альфа мал, например, составляет 0,3) или достаточно быстро адаптироваться к поступающей информации в случае, когда в процессе происходят качественные изменения (когда альфа больше 1, например, составляет 1,7). Графическое представления этой трактовки дано на Рис. 3.

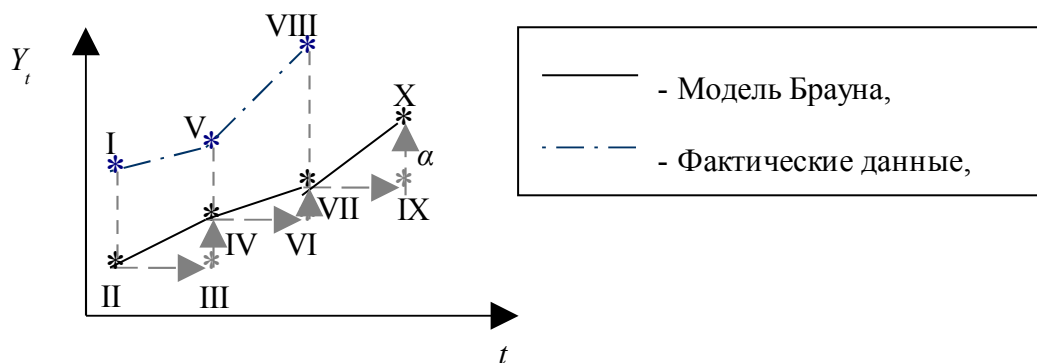


Рис. 3. Графическое представление механизма адаптации в модели (12).

Здесь расчётное значение II берётся за базу для прогноза на следующем наблюдении и переносится в точку III, которая затем корректируется на величину отклонения фактического значения I от расчётного II. В итоге прогнозное значение из точки III «переходит» в точку IV, которая в свою очередь становится базой для следующего прогноза (точка VI) и так далее.  $\alpha$  в этой интерпретации выступает константой, регулирующей скорость адаптации, то есть то, на какую величину произойдёт корректировка модели (например, из точки III в точку IV).

Исследования, проведённые с 1993 по 2005 год, поддержанные Российским фондом фундаментальных исследований, показали, что, когда перед исследователем стоит задача прогнозирования нестационарного процесса, модель Брауна даёт лучшие результаты в случае с  $\alpha > 1$  [Светуныков, стр. 28].

Для того чтобы закончить рассмотрение различных вариантов интерпретации одной и той же модели Брауна, введём коэффициент  $\eta$ , такой, что:

$$\alpha = 1 + \eta . \quad (13)$$

Если  $\alpha \in (0; 2)$ , то, естественно, что  $\eta \in (-1; 1)$ . С учётом условия (13) мы можем модифицировать модель Брауна (12):

$$\hat{Y}_{t+1} = \hat{Y}_t + (1 + \eta)(Y_t - \hat{Y}_t) . \quad (14)$$

Раскрыв скобки в (14) и проведя элементарные преобразования, получим следующую модель:

$$\hat{Y}_{t+1} = Y_t + \eta(Y_t - \hat{Y}_t) . \quad (15)$$

Эта модель тождественна моделям (10) и (12), однако благодаря такому представлению, трактовать её можно несколько иначе. В ней прогнозное значение на шаге  $t+1$  полностью учитывает фактическое значение на наблюдении  $t$ , и корректируется на величину отклонения пропорционально  $\eta$ . Графически этот механизм может быть представлен так, как это показано на Рис. 4. По своей логике этот механизм напоминает описанный для Рис. 3, однако у него есть некоторые отличия. Так модель изначально формируется исходя из данного фактического значения (значение точки I переносится на следующее наблюдение в точку III), которое затем корректируется на величину отклонения факта (точка I) от прогноза (точка II) на предыдущем наблюдении.  $\eta$  в этой интерпретации выступает константой, не только регулирующей величину корректировки, но ещё и определяющей направление корректировки. То есть она характеризует то, на какую величину, и в какую сторону произойдёт корректировка модели (например, из точки VI вниз, в точку VII).

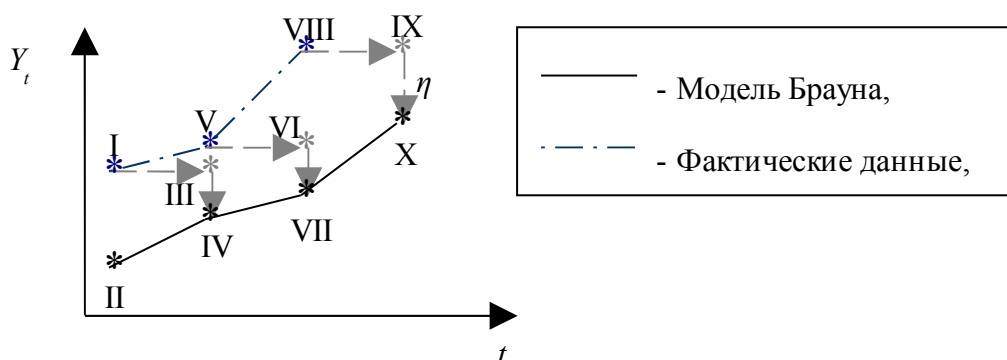


Рис. 4. Графическое представление механизма адаптации в модели (15).

Как видим, вне зависимости от того, каким образом мы группируем переменные в модели, прогноз не меняется, модель Брауна даёт одни и те же результаты в любых формах её записи, однако меняется экономическая интерпретация её коэффициентов, в результате чего некоторые исследователи накладывают те или иные ограничения на модель. Это явление достаточно часто встречается в экономико-математическом моделировании: желание дать трактовку той или иной модели, тому или иному показателю, ограничивает саму модель, в результате чего она начинает работать хуже.

Есть ещё одна сторона экономико-математического моделирования, связанная с трактовкой полученных результатов, которая достаточно часто встречается в экономической теории: у экономистов всегда есть соблазн поставить знак равенства между реальным объектом и построенной моделью, в результате чего реальный объект в сознании людей наделяется свойствами, имеющимися лишь у модели, которыми он на самом деле не обладает. Однако рассмотрение этой стороны экономико-математического моделирования выходит за рамки данной статьи.

## Список используемой литературы

1. Лукашин Ю.П., Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 2003.
2. Светульников С.Г., Бутуханов А.В., Светульников И.С., Запредельные случаи метода Брауна в экономическом прогнозировании. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2006.