

Новые коэффициенты оценки качества эконометрических моделей

В статье рассмотрены преимущества и недостатки существующих коэффициентов, с помощью которых оценивается качество построенных эконометрических моделей (средняя относительная ошибка аппроксимации и коэффициент детерминации), и предлагаются два новых коэффициента (коэффициент соответствия и коэффициент сбалансированности), дающие новую информацию о свойствах построенных моделей.

Ключевые слова: оценка качества эконометрических моделей, ошибка аппроксимации, коэффициент детерминации R^2 , комплексные переменные, коэффициент соответствия, коэффициент сбалансированности.

JEL classification: C01, C52.

Ivan Svetunkov

New coefficients of econometrics models quality estimation

Advantages and disadvantages of existing coefficient of determination and mean absolute percentage error are examined in the paper and two new coefficients (compliance coefficient and balance coefficient), giving new information about approximation properties of econometrics models, are proposed.

Key words: econometrics models quality estimation, approximation error, determination coefficient R^2 , complex variables, compliance coefficient, balance coefficient.

JEL classification: C01, C52.

1. Введение

Построение эконометрических моделей с целью анализа и прогнозирования экономических процессов является одной из важнейших задач во время проведения исследований как на микро-, так и на макроэкономическом уровне. Во время моделирования приходится, так или иначе, сталкиваться с проблемой оценки качества полученной модели. Для того чтобы выяснить, насколько хорошо полученная модель описывает ряд данных, обычно вычисляются различные коэффициенты, по которым делаются выводы об адекватности модели. В данной статье мы ограничимся коэффициентами для линейных регрессионных моделей, как наиболее часто встречающихся на практике.

2. Существующие коэффициенты оценки качества эконометрических моделей

Одним из простых коэффициентов, дающих своеобразную краткую характеристику соответствия смоделированных процессов реальным, является средняя относительная ошибка аппроксимации (Kennedy, 2003).

Рассмотрим две наиболее популярные версии формул для расчёта средней относительной ошибки аппроксимации (Елисеева и др., 2004):

$$A_{\text{first}} = \frac{100\%}{\bar{y}} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \hat{y}_t)^2}, \quad (1)$$

$$A_{\text{second}} = \frac{100\%}{n} \cdot \sum_{t=1}^n \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right|. \quad (2)$$

Здесь A_{first} и A_{second} — это значения средней ошибки аппроксимации, \bar{y} — среднее значение исходного ряда данных, y_t — фактическое значение на наблюдении t , \hat{y}_t — расчётное значение на наблюдении t , n — количество наблюдений. В зарубежной литературе в качестве показателя оценки моделей чаще встречается средняя абсолютная ошибка аппроксимации (Mean Absolute Percentage Error, MAPE), рассчитанная по формуле (2), см. (Tsay, 2005; Rao, 1972).

Обычно эти коэффициенты дают хорошие результаты, и их достаточно для оценки адекватности полученной модели, хотя их значения, естественно, отличаются друг от друга.

Кроме того, практически всегда при построении линейных регрессионных моделей рассчитывается коэффициент детерминации R^2 по следующей формуле (Джордж, 2009):

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^n (\hat{y}_t - \bar{\hat{y}})^2}{\sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2}, \quad (3)$$

где $\bar{\hat{y}}$ — среднее значение ряда расчётных значений.

Часто для оценки модели достаточно ограничиться этими тремя показателями. Однако на практике существует ряд ситуаций, в которых ни одна из приведённых формул для расчета ошибок аппроксимации не даёт правильной информации о свойствах построенных моделей. Рассмотрим эти ситуации подробнее.

Нетрудно заметить, что величина ошибки аппроксимации в формуле (1) сильно зависит от средней арифметической по ряду, а в формуле (2) — от фактических значений y_t . Так, из формулы (1) следует, что в случаях, когда среднее значение \bar{y} по ряду данных близко к нулю, значение ошибки аппроксимации становится очень большим и перестаёт отражать реальные свойства модели вне зависимости от значения \hat{y}_t . В свою очередь, из формулы (2) видно, что, если в ряде данных имеются значения y_t , близкие к нулю, то значение ошибки аппроксимации также становится чрезмерно завышенным вне зависимости от адекватности построенной модели.

Кроме того, если значение \hat{y}_t равно нулю (или близко к нулю), то, как видно из формулы (2), ошибка аппроксимации перестаёт учитывать разницу между фактическим и расчётным значениями — под знаком суммы получается единица.

Помимо этого, если фактические данные ряда имеют очень большие значения (например, измеряются в тысячах или сотнях тысяч единиц), то знаменатель как формулы (1), так и формулы (2) становится очень большим, в результате чего ошибки аппроксимации существенно занижаются, вне зависимости от качества построенной модели.

Как видим, объективно оценить качество модели только по ошибкам аппроксимации не представляется возможным. Впрочем, в ряде случаев исследователю не столь важно, какой именно получилась ошибка аппроксимации: 1300% или 13% — достаточно сравнить ошибки по нескольким моделям и выбрать ту, для которой ошибка минимальна. Однако в случае с большими значениями (в исходных данных) средние относительные ошибки аппроксимации, как уже было сказано ранее, могут существенно занижаться. Различия между ними в таком случае могут быть крайне незначительными, и сравнение их друг с другом уже не представляется возможным. Получается, что в указанных ситуациях объективную оценку адекватности модели по формулам (1) и (2) получить невозможно.

У упомянутого выше коэффициента детерминации R^2 также есть недостаток. Если модель построена с систематической ошибкой, но общую тенденцию ряда фактических данных описывает хорошо, то значение коэффициента будет близким к 1, что соответствует ситуации «очень хорошей модели». Этот недостаток отчётливо виден в формуле (3): если прибавить ко всем расчётным значениям \hat{y}_t константу, то, очевидно, сумма квадратов отклонений никак не изменится, а значит и коэффициент детерминации будет таким же, несмотря на то, что у модели появится систематическая ошибка. Конечно, случай построения модели с систематическим отклонением можно признать редко встречающимся на практике, тем не менее, получить достоверную характеристику о качестве построенной модели по значению коэффициента детерминации также не всегда представляется возможным.

Очевидно, что одновременное проявление всех обозначенных признаков на практике маловероятно, поэтому указанные недостатки в первую очередь говорят о том, что для более объективной оценки качества модели стоит рассчитывать несколько коэффициентов. Однако проблема получения более совершенного коэффициента, с помощью которого можно было бы более объективно оценить качество построенной эконометрической модели, пока остаётся нерешённой.

3. Объединение значений в комплексную переменную

Для того, чтобы попытаться решить эту проблему, рассмотрим фактические y_t и расчётные \hat{y}_t значения переменных не в виде отдельных чисел, а как единое комплексное число: $z_t = y_t + i\hat{y}_t$. Здесь y_t — вещественная часть комплексного числа, $i\hat{y}_t$ — мнимая часть комплексного числа, y_t

и \hat{y}_t — вещественные числа, i — мнимая единица: $i^2 = -1$. Любое комплексное число может быть выражено не только в алгебраической форме, но и в экспоненциальной (Swokowski, Cole, 2006):

$$z_t = y_t + i\hat{y}_t = Re^{i\varphi},$$

здесь $R = |z_t| = \sqrt{y_t^2 + \hat{y}_t^2}$ — модуль комплексного числа $y_t + i\hat{y}_t$, т.е. длина вектора на плоскости, выходящего из начала координат и заканчивающегося в точке $(y_t; \hat{y}_t)$; $\varphi = \text{Arg}(z_t)$ — аргумент комплексного числа $y_t + i\hat{y}_t$ или полярный угол, который образует соответствующий вектор с осью абсцисс (Whittaker, Watson, 2005). При этом $\text{Arg}(z_t) = \text{arg}(y_t + i\hat{y}_t) + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, где $\text{arg}(y_t + i\hat{y}_t)$ — главное значение аргумента, определяемое условием $-\pi < \text{arg}(y_t + i\hat{y}_t) < \pi$.

В этой статье мы будем ограничивать периодичность аргумента, принимая $k = 0$. Говоря о векторе, мы будем иметь в виду комплексную переменную на плоскости.

Стоит заметить, что указанная экспоненциальная форма комплексного числа актуальна только в случае представления его на евклидовой плоскости, по осям которой откладываются действительные числа (Рис. 1).

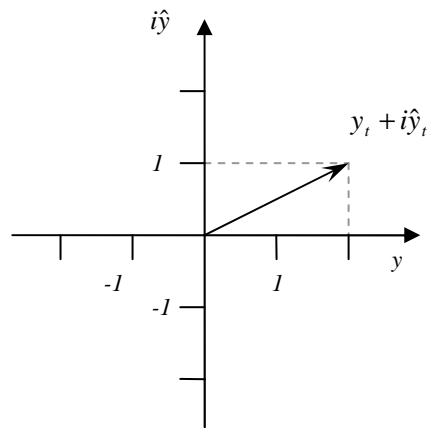


Рис. 1. Представление комплексного числа на евклидовой плоскости

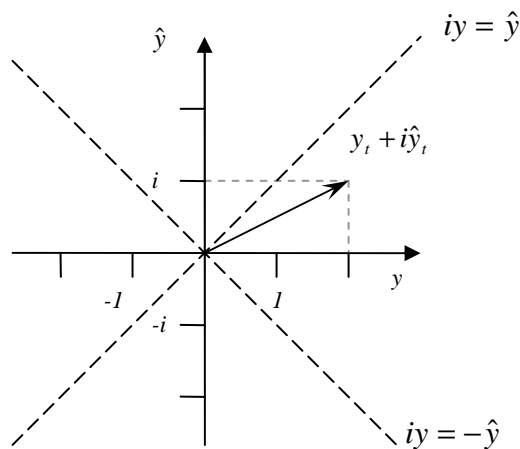


Рис. 2. Представление комплексного числа на псевдоевклидовой плоскости

В физике для объяснения специальной теории относительности используют так называемую «псевдоевклидову плоскость», известную также как «пространство Минковского» (Колмогоров, Юшкевич, 1981). Не будем подробно останавливаться на её свойствах, отметим только, что одним из основных её отличий от евклидовой плоскости, является то, что по оси ординат откладывают не действительные, а мнимые числа (Рис. 2). Как результат, длина вектора $z_t = y_t + i\hat{y}_t$ на псевдоевклидовой плоскости находится по формуле:

$$|z_t|_{ps} = \sqrt{y_t^2 + (i\hat{y}_t)^2} = \sqrt{y_t^2 - \hat{y}_t^2}. \quad (4)$$

Здесь индекс «ps» у модуля комплексного числа z_t введён специально для того, чтобы можно было различать модуль на евклидовой и псевдоевклидовой плоскостях.

Как известно, на евклидовой плоскости нулевую длину может иметь только нулевой вектор (0;0). На псевдоевклидовой плоскости, как можно заметить из формулы (4), ненулевые векторы могут иметь нулевую длину (например, $|2+2i|_{ps} = 4 - 4 = 0$). Векторы (y_t, \hat{y}_t) , псевдоевклидова длина которых равна нулю, образуют множество, удовлетворяющее условию: $|y_t| = |\hat{y}_t|$, т.е. одному из двух условий:

$$y_t = \hat{y}_t, \quad (5)$$

$$y_t = -\hat{y}_t. \quad (6)$$

Таким образом, векторы (y_t, \hat{y}_t) , координаты которых удовлетворяют условию (5) или (6), лежат на соответствующих прямых в псевдоевклидовой плоскости. Эти прямые называются *изотропными* (Сазанов, 1988). На Рис. 2 изотропные прямые показаны пунктирными линиями. Они делят плоскость на 4 сектора, однозначно определяющимися неравенствами, которым подчинены координаты точек, но мы для краткости будем пользоваться следующими терминами:

$$|y_t| > |\hat{y}_t| \begin{cases} y_t > 0 - \text{первый сектор} \\ y_t < 0 - \text{третий сектор} \end{cases}, \quad |y_t| < |\hat{y}_t| \begin{cases} y_t > 0 - \text{второй сектор} \\ y_t < 0 - \text{четвертый сектор} \end{cases}.$$

Как видно из (4), длина вектора на псевдоевклидовой плоскости может быть:

- действительным числом, если $|y_t| > |\hat{y}_t|$,
- мнимым числом, если $|y_t| < |\hat{y}_t|$.

На псевдоевклидовой плоскости векторы с действительными длинами будут лежать либо в правом, либо в левом секторе, в то время как векторы с мнимыми длинами будут лежать либо в верхнем, либо в нижнем секторе.

4. Коэффициент сбалансированности

Перечисленные выше свойства интересны возможностью сопоставить фактические значения с расчётными и получить информацию о том, насколько модель соответствует действительности.

1. Если фактические данные по модулю больше расчётных, т.е. $|y_t| > |\hat{y}_t|$, то модуль комплексного числа $z_t = y_t + i\hat{y}_t$ на псевдоевклидовой плоскости будет действительным числом.
2. Если фактические данные по модулю меньше расчётных, т.е. $|y_t| < |\hat{y}_t|$, то модуль комплексного числа $z_t = y_t + i\hat{y}_t$ на псевдоевклидовой плоскости будет мнимым числом.
3. Если фактические и расчётные равны по модулю, то модуль комплексного числа $z_t = y_t + i\hat{y}_t$ равен нулю.

Для того чтобы получить коэффициент соответствия реальных данных расчётным на основе комплексного числа, рассмотрим соотношение между двумя модулями комплексного числа: на евклидовой плоскости (R_1) и на псевдоевклидовой плоскости (R_2):

$$R_{1t} = \sqrt{y_t^2 + \hat{y}_t^2}, \quad R_{2t} = \sqrt{y_t^2 - \hat{y}_t^2}.$$

Отметим, что:

- 1) R_{2t} может быть как мнимым, так и действительным числом, в то время как R_{1t} может быть только действительным числом;
- 2) $R_{2t} = 0$, если фактические значения по модулю равны расчётным;
- 3) всегда $R_{1t} \geq 0$, при этом $R_{1t} = 0$ только тогда, когда $y_t = \hat{y}_t = 0$;
- 4) в случае, когда фактические значения равны нулю, $R_{1t} = \sqrt{\hat{y}_t^2} = |\hat{y}_t|$, $R_{2t} = \sqrt{-\hat{y}_t^2} = i|\hat{y}_t|$;
- 5) в случае, когда расчётные значения равны нулю, $R_{1t} = \sqrt{y_t^2} = |y_t|$, $R_{2t} = \sqrt{y_t^2} = |y_t|$.

Используя эти свойства, можно получить коэффициент соответствия ряда фактических данных ряду расчётных данных. Например, путем соотнесения средней величины модулей одного типа по ряду данных к средней величине модулей другого типа для того же ряда данных:

$$B = \frac{\frac{\sum_{t=1}^n \sqrt{y_t^2 - \hat{y}_t^2}}{n}}{\frac{\sum_{t=1}^n \sqrt{y_t^2 + \hat{y}_t^2}}{n}} = \frac{\sum_{t=1}^n \sqrt{y_t^2 - \hat{y}_t^2}}{\sum_{t=1}^n \sqrt{y_t^2 + \hat{y}_t^2}} \quad (7)$$

Как видно из формулы (7), коэффициент B обладает рядом интересных свойств. B может быть как действительным (в случае, если у модели имеются систематические отклонения, такие, что $|y_t| > |\hat{y}_t|$, причём, если все $\hat{y}_t = 0$, то $B = 1$), мнимым (в случае, когда у модели имеются такие систематические отклонения от реальных данных, что $|y_t| < |\hat{y}_t|$, причём, если все $y_t = 0$, то $B = i$), так и комплексным числом. Принадлежность коэффициента B к тому или иному множеству чисел показывает, в каком секторе на плоскости лежит большая часть векторов, а величина B показывает, насколько далеко расположены векторы от изотропной прямой. Равенство коэффициента B нулю означает абсолютное совпадение расчётных и фактических значений. Кроме того, можно заметить, что коэффициент может принимать только такие значения, что на евклидовой плоскости

$|B| \leq 1$. Графически область допустимых значений коэффициента может быть представлена в виде сектора окружности в первом квадранте (см. Рис. 3). Чем ближе в таком случае величина коэффициента B к границе, тем бóльшие отклонения имеет модель от фактических значений.

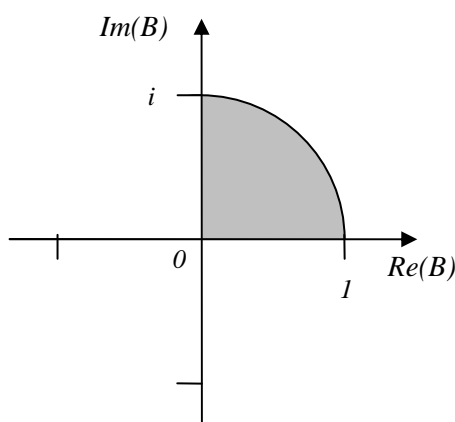


Рис. 3. Область допустимых значений коэффициента сбалансированности

Таким образом, по значению коэффициента B можно определить, насколько расчётные значения в среднем больше или меньше фактических, насколько модель в целом сбалансирована. Поэтому коэффициент B можно условно назвать **коэффициентом сбалансированности**.

Например, если в результате расчёта получилось $B = 0.5 + 0.1i$, то это значит, что векторы по большей части лежат в правом, либо в левом секторе, т.е. фактические значения по модулю больше расчётных, а значит, у модели имеется систематическая ошибка.

Однако очевидно, что коэффициент сбалансированности реагирует не только на систематические отклонения, но и на случайные. Причём, если распределение остатков модели оказывается симметричным относительно нуля, то действительная и мнимая части коэффициента B будут примерно равны (потому что в таком случае для части наблюдений фактические значения будут по модулю больше расчётных, а для другой части — меньше). Если же распределение остатков имеет некоторую асимметрию, то одна из частей коэффициента будет превышать другую. Таким образом, по значению коэффициента сбалансированности можно ещё и косвенно судить о наличии либо отсутствии асимметрии остатков.

Имея эту информацию, исследователь может принять какие-то меры для улучшения аппроксимационных свойств модели.

5. Коэффициент соответствия

Однако одной длины вектора для точной его идентификации недостаточно. Как видно, с помощью коэффициента B можно определить принадлежность комплексных чисел к тому или иному сектору на плоскости и близость их к изотропным линиям, но не более того. Модель адекватна, если векторы на псевдоевклидовой плоскости лежат рядом с изотропной прямой $y_i = \hat{y}_i$. А что, если большая часть комплексных чисел лежит около другой изотропной прямой: $y_i = -\hat{y}_i$? Конеч-

но, такая ситуация на практике маловероятна, но, тем не менее, теоретически возможна. Это означает, что модель работает плохо, но коэффициент B этого не покажет. Для того чтобы понять, около какой изотропной прямой лежат комплексные числа, нужен ещё один коэффициент.

Обычно для идентификации комплексного числа, помимо модуля используют ещё и полярный угол. Однако, если в случае с евклидовой плоскостью вычислить его не составляет особых проблем, то вычисление угла на псевдоевклидовой плоскости сопряжено с рядом проблем (Сазанов, 1988). В его нахождении на псевдоевклидовой плоскости есть также одно интересное обстоятельство: измерение полярного угла должно происходить от ближайшей к вектору оси. Эту идею можно перенести на вычисление полярного угла на евклидовой плоскости — вычислять угол между вектором и ближайшей к нему осью. Причем, для оценивания модели удобнее находить не само значение такого угла, а его тангенс. В таком случае формула для вычисления будет иметь вид:

$$\operatorname{tg} \varphi_t = s_t = \frac{a_t}{b_t}, \quad (8)$$

где $a_t = y_t, b_t = \hat{y}_t$, если $|y_t| < |\hat{y}_t|$, и $a_t = \hat{y}_t, b_t = y_t$, если $|y_t| > |\hat{y}_t|$ (а случай $y_t = \hat{y}_t = 0$?).

Данное условие фактически означает, что для всех векторов, лежащих в левом и правом секторах, φ_t – угол, образованный с осью абсцисс, а для векторов, лежащих в верхнем и нижнем секторах – φ_t – угол, образованный с осью ординат. Кроме того тангенсы углов наклона векторов, лежащих в I или III четверти будут положительными, а тангенсы углов наклона векторов, лежащих во II и IV четвертях будут отрицательными. Причём, $\operatorname{tg} \varphi_t$ будет тем ближе к 1, чем ближе расчётные значения к фактическим. Кроме того, он будет отрицательным, если расчётные и фактические значения противоположны по знаку.

Для оценивания ряда данных предлагается рассчитывать значения тангенсов для каждого наблюдения по формуле (8), после чего брать средние значения по всему ряду. Тогда формула для нахождения коэффициента будет выглядеть следующим образом:

$$C = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n s_t \cdot 100\%, \quad (9)$$

где $s_t = \frac{y_t}{\hat{y}_t}$, если $|y_t| < |\hat{y}_t|$; $s_t = \frac{\hat{y}_t}{y_t}$, если $|y_t| > |\hat{y}_t|$; $s_t = -1$, если $y_t = -\hat{y}_t$ и $s_t = 1$, если $y_t = \hat{y}_t$.

Последнее условие вызвано тем, что в общем случае, если $y_t = \hat{y}_t$, то $s_t = 1$. Однако, если $y_t = \hat{y}_t = 0$, то найти s_t не представляется возможным, но, исходя из общей логики вывода коэффициента, надо брать $s_t = 1$, т.к. расчётное значение в таком случае совпадает с фактическим, а это означает, что модель хорошо предсказала фактическое значение.

Из формулы (9) видно, что значение коэффициента C лежит в пределах от -100% до 100% . Чем он ближе к 100% , тем лучше модель описывает ряд данных. Если $C = 0\%$, то возможна одна из двух ситуаций: либо все расчётные значения оказались равными нулю, а фактически – отличными от нуля, что говорит о том, что модель не объясняет вариацию признака (как бы не менялись значения фактора, результат получается один и тот же – 0), либо все фактические значения оказались

равными нулю, но модель при этом прогнозирует некоторые изменения в ряде данных. Оба эти случая можно признать ненормальными, крайне редко встречающимися в экономико-математическом моделировании. И, наконец, близость C к -100% , характеризует противоположность (по знаку) фактических и расчётных данных.

Коэффициент C можно назвать **коэффициентом соответствия** расчётных данных фактическим.

Стоит, однако, заметить, что коэффициент C отражает только соотношение между фактическими и расчётными значениями, а не отклонение модели от факта. Так значение коэффициента при $y_t = 1000$ и $\hat{y}_t = 700$ будет равно значению коэффициента при $y_t = 1$ и $\hat{y}_t = 0.7$, хотя отклонение в первом случае составляет 300 единиц, а во втором — всего лишь 0,3.

Итак, коэффициент C несёт информацию о соотношении между расчётными и фактическими значениями, а коэффициент B — о характере отклонений расчётных значений от фактических. Их использование в паре может дать исследователю более полную информацию о качестве полученной модели.

6. Расчёт и интерпретация коэффициентов на примерах

Рассмотрим для начала на условном примере, как можно использовать выведенные нами коэффициенты. Возьмём как отрицательные, так и положительные значения. Значение $y_t = 0$ брать не будем, т.к. в этом случае вычисление ошибки аппроксимации по формуле (2) становится невозможным — вместо этого возьмём значение, близкое к нулю (0.01). В Таблица 1 и на рисунке 4 представлен ряд фактических данных y_t и данных \hat{y}_t , рассчитанных по линейной функции, лучше всего описывающей первоначальный ряд:

$$\hat{y}_t = 1.0536t - 4.1414. \quad (10)$$

Таблица 1. Данные из условного примера

t	y_t	\hat{y}_t
1	-3.00	-3.09
2	-2.00	-2.03
3	-1.00	-0.98
4	0.01	0.07
5	1.00	1.13
6	2.00	2.18
7	3.50	3.23

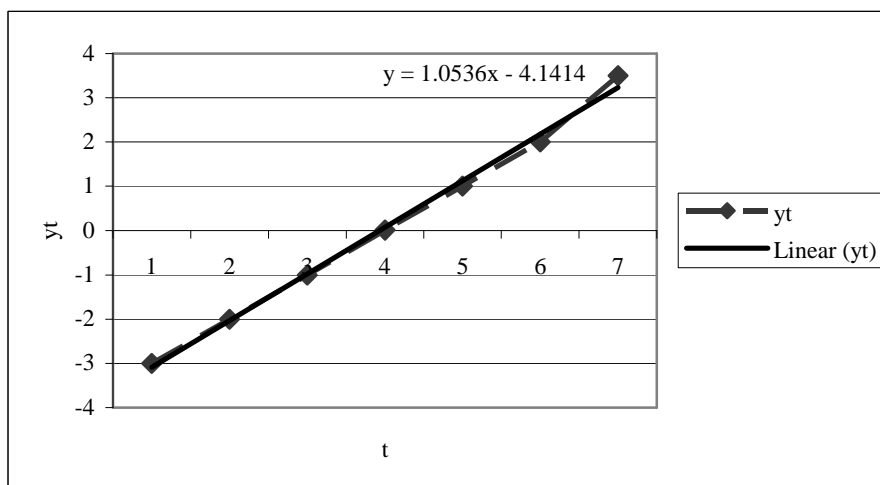


Рис. 4. Изменение значения y_t во времени

В таблице 2 приведены промежуточные значения, требующиеся для расчёта коэффициентов (7) и (9) для функции (10).

Таблица 2. Пример промежуточных значений, необходимых для расчёта коэффициентов B и C

t	Модуль на псевдоевклидовой плоскости	Модуль на евклидовой плоскости	s_t
1	$0.73110i$	4.30517	0.97157
2	$0.37144i$	2.85271	0.98319
3	0.19602	1.40056	0.98060
4	$0.07231i$	0.07368	0.13699
5	$0.51887i$	1.50640	0.88763
6	$0.86791i$	2.95859	0.91735
7	1.33886	4.76523	0.92394

Второй и третий столбцы нужны для расчёта коэффициента B . Последний столбец содержит данные для расчёта коэффициента C .

В результате расчёта коэффициентов получим следующие значения:

$A_{\text{first}} = 188.90\%$, $A_{\text{second}} = 95.12\%$, $C = 82.85\%$, $B = 0.0859 + 0.1434i$. Для ряда фактических и расчётных данных был также рассчитан коэффициент детерминации: $R^2 = 0.9958$.

Если судить о сформированной модели (10) по значениям ошибок аппроксимации A_{first} и A_{second} , то создаётся впечатление, что модель подобрана ужасно: значение одного коэффициента значительно больше 100%, а второго — близко к 100%. Однако коэффициент C показывает, что модель не такая уж и плохая: соответствие между фактическими и расчётными данными в 82.85% — это, конечно, не 100%, но и не так мало, по сравнению с 95% и 0% в случае со средней ошибкой аппроксимации. Кроме того, из Рис. 4 видно, что некоторая ошибка действительно есть, но она уж точно не составляет 100%! Одновременно с этим коэффициент детерминации (он получился очень близким к 1) показывает, что модель очень хорошо описывает ряд фактических данных. Однако

значения рассчитанных нами ошибок аппроксимации оказались очень большими. Этому есть логическое объяснение:

1. Среднее значение по ряду фактических данных, требующееся для нахождения коэффициента A_{first} по формуле (1), меньше единицы и составляет $\bar{y} = 0.07$. При делении на это число результирующее значение достаточно сильно увеличивается.
2. Из Таблица 1 видно, что на четвертом наблюдении значение y_t оказалось близко к нулю, а из-за того, что при нахождении значения коэффициента A_{second} происходит деление на это число, результат значительно увеличивается. Если четвертое наблюдение исключить из ряда данных и снова рассчитать ошибку аппроксимации, то она значительно уменьшится и составит $A_{\text{second}} = 5.98\%$.

Выходит, что коэффициенты дают такие большие значения ошибок не из-за неадекватности модели, а всего лишь из-за характера исходных данных. В этой непростой ситуации выведенные нами коэффициенты B и C показывают, что модель всё-таки неплохо описывает ряд фактических данных. В частности, по коэффициенту B можно сказать, что отклонения расчётных данных от фактических невелико, а большая часть векторов лежит либо в верхнем, либо в нижнем секторе. Это также видно и по расположению векторов на псевдоевклидовой плоскости (Рис. 5) — все они достаточно близки к изотропной линии $y_t = \hat{y}_t$.

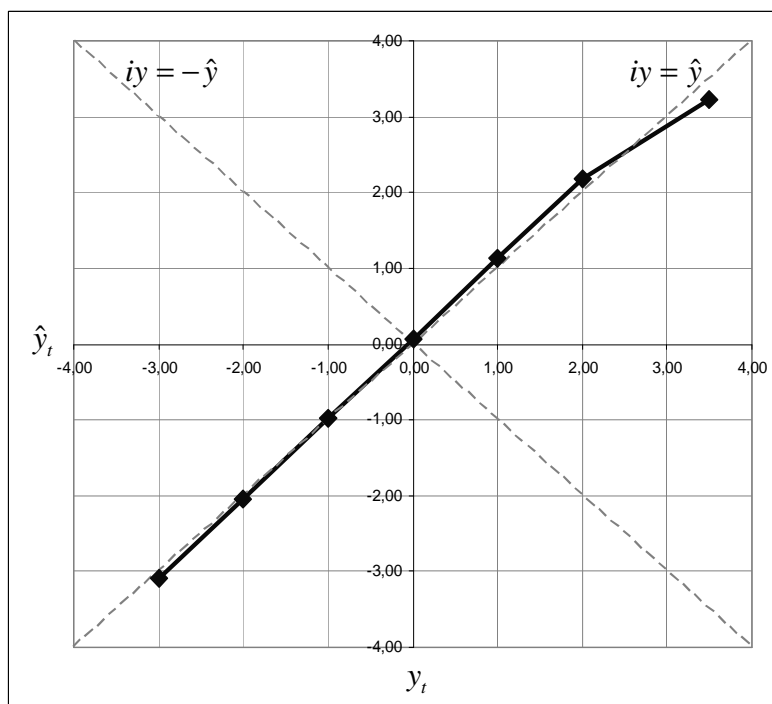


Рис. 5. Расположение векторов на псевдоевклидовой плоскости для условного примера

Если теперь константу в модели (10) заменить, например, на число -10 , т.е. рассмотреть следующую модель с систематическим отклонением:

$$\hat{y}_t = 1.0536t - 10,$$

то получим следующие показатели: $A_{\text{first}} = 8043.24\%$, $A_{\text{second}} = 8273.05\%$, $C = -11.03\%$, $B = 0.053 + 0.8318i$, $R^2 = 0.9958$. Ошибки аппроксимации отреагировали на такое изменение константы и показали, что модель стала совсем плохой (что, конечно, так и есть). Коэффициент соответствия получился вообще достаточно близким к нулю и отрицательным, что говорит не только о том, что модель плохо описывает ряд данных, но ещё и о том, что в нескольких случаях расчётные значения оказались противоположными по знаку фактическим. Коэффициент сбалансированности показал, что у модели сильный крен в сторону расчётных значений (мнимая часть оказалась значительно больше действительной) — видно, что имеется систематическое отклонение. А вот коэффициент детерминации остался таким же (0.9958). Если делать выводы только по нему, то можно заключить, что у исследователя получилась очень хорошая модель, хотя это на самом деле не так. Данный пример в очередной раз показывает, что при оценке адекватности любой модели имеет смысл рассчитывать сразу несколько характеристик, нельзя опираться только на одну из них.

Теперь перейдём к рассмотрению наших коэффициентов на реальных данных. Начнём с данных о номинальном объеме произведенного ВВП в России за 2002–2008 годы, взятых с сайта Госкомстата РФ www.gks.ru (см. Таблица 3).

Таблица 3. Номинальный объём произведённого ВВП в России в 2002–2008 годах (в млрд руб.) и его аппроксимации с помощью экспоненциальной и линейной функции

t	Год	Объём ВВП (y_t)	\hat{y}_t (экспоненциальная)	\hat{y}_t (линейная)
1	2002	10830.50	10788.22	8264.60
2	2003	13243.20	13525.21	13339.80
3	2004	17048.10	16956.56	18415.00
4	2005	21625.40	21258.46	23490.20
5	2006	26903.50	26651.76	28565.40
6	2007	33111.40	33413.33	33640.60
7	2008	41668.00	41890.33	38715.80

На плоскости «время–объём ВВП» фактические данные из табл. 3 ложатся очень интересным образом — видно, что лучше всего этот ряд данных опишет экспоненциальная функция (

Рис. 6). Тем не менее, методом наименьших квадратов найдём коэффициенты не только для экспоненциального, но и для линейного тренда. Получим:

$$\hat{y}_{\text{exp}_t} = 8605.1e^{0.2261t}, \quad (11)$$

$$\hat{y}_{\text{lin}_t} = 5075.2t + 3189.4. \quad (12)$$

Значения функций (11) и (12) по годам представлены в табл. 3.

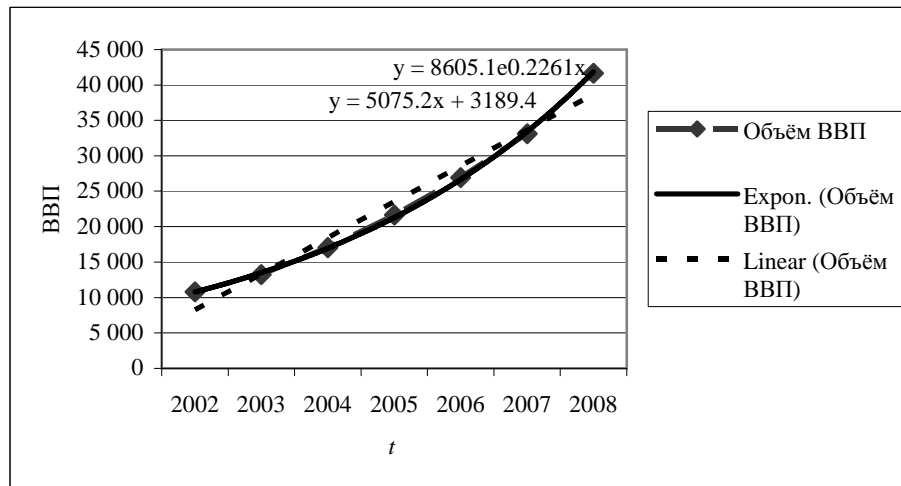


Рис. 6. Изменение объема произведенного ВВП в России во времени.

Теперь рассчитаем коэффициенты (1), (2), а также (7) и (9).

Для экспоненциальной функции (11) получим:

$$A_{\text{first}} = 1.05\% , A_{\text{second}} = 1.02\% , C = 98.99\% , B = 0.0445 + 0.0496i , R^2 = 0.9995 .$$

По значению коэффициента C можно заключить, что модель очень хорошо описывает реальные данные — соответствие практически стопроцентное. В свою очередь, по значению коэффициента B можно сказать, что отклонения расчётных значений от фактических незначительны, но равномерны (действительная часть близка по значению к мнимой), т.е. в целом распределение остатков модели не имеет большой асимметрии.

Перейдя к линейной функции (12), получим следующий набор коэффициентов:

$$A_{\text{first}} = 7.83\% , A_{\text{second}} = 7.99\% , C = 92.37\% , B = 0.0963 + 0.1430i , R^2 = 0.9682 .$$

Как видим, динамику изменения объема ВВП линейная функция описывает хуже, чем экспоненциальная. Об этом свидетельствуют и меньшее значение коэффициента C , и большее значение коэффициента B по сравнению со значениями этих коэффициентов для функции (11). Стоит также заметить, что мнимая составляющая коэффициента B оказалась больше действительной, это говорит о том, что большая часть векторов лежит в верхнем секторе. Применительно к нашей ситуации это означает, что модель (12) даёт систематическое, хоть и небольшое, завышение по сравнению с фактическими значениями. Это, в принципе, видно и по графику (см. рис. 6).

Рассмотрим более сложный пример расчёта коэффициентов сбалансированности и соответствия — построение производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами по данным Диатомового комбината. Пример сложен тем, что для построения модели данные нужно привести к безразмерным величинам, при этом один из показателей, требующий такого приведения — это прибыль организации, которая принимает как положительные, так отрицательные и близкие к нулю значения (Светуныхов, 2007). В результате приведения данных к относительным величинам и построения модели получим значения, представленные в Таблица 4.

Таблица 4. Приведённые фактические и расчётные значения прибыли Диатомового комбината

t	Прибыль фактическая	Прибыль по модели
1	0.012308	-0.049609
2	-0.058620	-0.032465
3	-0.165870	-0.038947
4	-0.007310	-0.012894
5	0.007612	-0.008581
6	-0.000110	0.025115
7	0.063887	0.010122
8	0.023063	0.038876
9	0.050557	0.037702
10	0.026168	0.054776
11	0.062789	0.074427
12	0.140044	0.097013
13	0.085624	0.114934
14	0.123722	0.120919

Рассчитаем тот же набор коэффициентов, что и для функций (11)–(12). Получим:

$$A_{\text{first}} = 173.71\% , A_{\text{second}} = 1678.08\% , C = 38.93\% , B = 0.3749 + 0.2452i , R^2 = 0.6309 .$$

Как видим, ошибки аппроксимации (1) и (2) получаются просто гигантскими: A_{first} составляет более сотни процентов, A_{second} показывает ошибку более чем в тысячу процентов!

Если посмотрим на ряд данных в Таблица 4, обратим внимание, что на шестом наблюдении фактическое значение прибыли составило -0.000110 . Именно из-за этого значения коэффициент A_{second} даёт такую огромную ошибку аппроксимации — если это наблюдение исключить из ряда данных, то A_{second} станет существенно меньше: не 1678.08%, а 98.97%.

Если же рассчитать среднюю величину по ряду «Прибыль фактическая» (как это требуется для расчёта формулы (1)), то получим $\bar{y} = 0.0259$ (из-за наличия как положительных, так и отрицательных величин). Деление на эту величину приводит к значительному росту ошибки аппроксимации A_{first} .

Коэффициенты C и B показали, что модель не очень хорошо описывает этот ряд данных (соответствие на 38% — не самое лучшее), однако по ним хотя бы можно судить о том, насколько расчётные значения соответствуют фактическим и насколько отклонение между ними «сбалансировано». В принципе, полученные значения коэффициентов B и C не удивительны, так как приведенный ряд данных достаточно сложно описать, какую бы модель мы ни использовали (см. рис. 7).

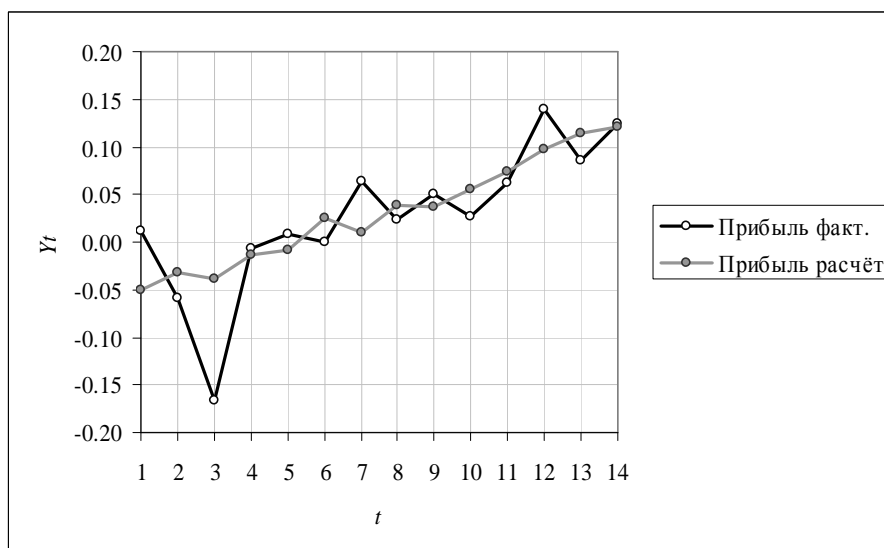


Рис. 7. Динамика прибыли Диатомового комбината

Если данные из Таблица 4 представить в виде комплексных чисел на плоскости, то получим интересную картину, которая может дать дополнительную информацию о соответствии нашей модели действительности (рРис. 8).

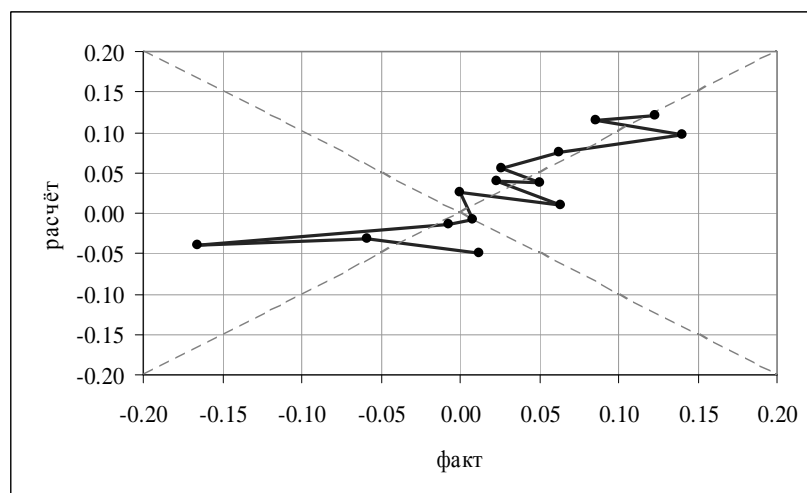


Рис. 8. Фактические и расчётные данные на псевдоевклидовой плоскости

По рисунку видно, что отклонение расчётных данных от фактических в целом более или менее сбалансировано, и модель для части наблюдений дала неплохие результаты, но несколько точек очень сильно отклоняются от изотропной прямой $y_t = \hat{y}_t$, что и приводит к таким величинам коэффициентов.

7. Заключение

Итак, коэффициенты сбалансированности и соответствия дают дополнительную информацию о том, насколько хорошо модель описывает действительность. Эти коэффициенты могут использоваться наравне с популярными среди исследователей коэффициентом детерминации и ошибками аппроксимации, а в некоторых ситуациях даже более информативны. Однако какими бы хорошими свойствами не обладали те или иные коэффициенты, при построении любых математических моделей имеет смысл рассчитывать сразу несколько коэффициентов, чтобы получить более полную и объективную информацию о построенных моделях.

Список литературы

- Доугерти К. (2009). *Введение в эконометрику*. 3-е изд. М.: ИНФРА-М.
- Елисеева И. И., Курышева С. В., Костеева Т. В., Бабаева И. В., Михайлов Б. А. (2004). *Эконометрика*. Учебник под ред. И. И. Елисеевой. М.: Финансы и статистика.
- Колмогоров А.Н., Юшкевич А.П. (ред.) (1981). *Математика XIX века: Геометрия. Теория аналитических функций*. М.: Наука.
- Сазанов А. А. (1988). *Четырёхмерный мир Минковского*. М.: Наука.
- Светульников И.С. (2007). Экономический анализ предприятия с помощью производственных функций комплексных переменных. В кн.: *Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении*. Сборник научных трудов. Выпуск № 16 / Под ред. Д. В. Соколова и В. П. Чернова. СПб: Изд-во СПбГУЭФ, 76–81.
- Kennedy P. (2003). *A guide to econometrics*. Blackwell Publishing.
- Rao V. R. (1972). Alternative econometric models of sales-advertising relationships. *Journal of Marketing Research*, 9 (2), 177–181.
- Swokowski E. W., Cole J. A. (2006). *Algebra and trigonometry with analytic geometry*. Thomson Brooks/Cole.
- Tsay R. S. (2005). *Analysis of financial time series*. Wiley.
- Whittaker E.T., Watson G.N. (2002). *A Course of modern analysis*. Cambridge University Press.