Светуньков И.С.,

Светуньков С.Г.

СТЕПЕННЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ[1]

Аппарат теории функций комплексных переменных уникален и активно используется во многих областях науки: в теоретической физике, механике, электротехнике, гидродинамике и др. Но в экономике этот аппарат до сих пор не используется. В 2004 году на кафедре «Экономическая кибернетика и экономико-математические методы» Санкт-Петербургского государственного университета экономики и финансов начались исследования в направлении использования комплексных переменных в экономико-математическом моделировании. Они показали на примере теории производственных функций, что использование комплексных переменных значительно расширяет инструментальную базу экономического анализа производственных процессов, вооружая практикующего экономиста новым инструментом моделирования.

В этой статье мы из всего многообразия возможных моделей производственных функций комплексных переменных рассмотрим модель степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами, которая, с одной стороны, является достаточно простой моделью, а с другой стороны, обладает свойствами, аналогичными реально протекающим производственным процессам. Свойства самой сложной степенной производственной функции с комплексными коэффициентами нами описаны и опубликованы [1] и поэтому мы на них не останавливаемся в данной статье.

---

[1] Выполнена при поддержке РФФИ, грант №07-06-00151 «Разработка основ экономико-математического моделирования с использованием комплексных переменных».

Производственную функцию комплексных переменных в общем виде можно представить в виде зависимости комплексного производственного результата от комплексной переменной производственных ресурсов:

$$G + iC = f\left(K + iL\right).$$

Для степенной производственной функции с действительными коэффициентами зависимость примет вид:

$$G + iC = a\left(K + iL\right)^{b}, \qquad (1)$$

где G и C – некоторые выходные переменные, представленные действительными числами, и характеризующими производственный результат,

K и L – входные переменные, также действительные числа, характеризующие затраты взаимозаменяемых производственных ресурсов,

i – мнимая единица, число, удовлетворяющее равенству: $i^2=-1$,

a и b – действительные коэффициенты функции.

Для того чтобы использовать аппарат теории функций комплексных переменных, при объединении двух экономических показателей в одну комплексную переменную должно выполняться два условия:

1. Эти показатели должны быть двумя характеристиками одного процесса или явления, то есть – отражать разные стороны этого явления;
2. Они должны иметь одинаковую размерность.

Эти два условия выполняются, когда, например, K – затраты капитала, а L – затраты труда, приведённые, как это принято в теории производственных функций к безразмерным величинам. Исследования показали, что при изменении K и L, G ведёт себя как валовая прибыль, а C – как суммарные издержки производства. Очевидно, что в сумме они дают доход предприятия:

$$G + C = Q$$

Модель (1) является одной из хорошо изученных функций комплексных переменных, конформное отображение которой делает её привлекательной для экономико-математического моделирования.

Если рассматривать комплексные переменные в экспоненциальной форме, а именно:

$$z = G + iC = \rho e^{i\theta}, \quad (2)$$

$$w = K + iL = re^{i\varphi}, \quad (3)$$

то для модели (1) имеем в экспоненциальной форме:

$$\rho e^{i\theta} = ar^b e^{ib\varphi}, \quad (4)$$

откуда:

$$\rho = ar^b, \ \theta = b\varphi \quad (5)$$

Тогда понятно, что отображение комплексной переменной ресурсов, осуществляемое функцией (1), сводится к растяжению модуля комплексного производственного результата в b-ю степень и увеличению полярного угла в b раз. Так как полярный угол периодичен, то периодичны и любые функции от него. Откуда со всей очевидностью следует, что комплексные переменные ресурсов w_1 и w_2 с равными модулями и аргументами, отличающимися друг от друга на целое число, кратное $\frac{2\pi}{b}$, переходят при отображении (1) в одну точку $z_1=z_2$.

Применительно к нашей задаче отображения комплексной переменной производственных ресурсов на комплексную плоскость производственных результатов, существуют ограничения, вызванные экономической сутью переменных. Комплексные переменные производственных ресурсов лежат в первом квадранте, поскольку $K>0$ и $L>0$, то есть аргумент φ переменной (3) меняется в пределах от 0 до $\frac{\pi}{2}$. Если он равен нулю, то это означает, что ни одной единицы трудовых ресурсов для производства не привлекается. Если же он становится равным $\frac{\pi}{2}$, то это означает, что для производства привлекаются только трудовые ресурсы, а капитальные ресурсы равны нулю.

Очевидно, что в реальности эти случаи встречаться не могут и оси координат мы должны исключить из области определения задачи.

Комплексные переменные производственных результатов (2) лежат на комплексной плоскости в более широких пределах от *0* до $\frac{3\pi}{4}$, то есть в первом и частично во втором квадрантах. Если полярный угол θ комплексной переменной производственных результатов равен нулю, это означает, что издержки производства равны нулю, а валовая прибыль максимальна. Вряд ли можно вспомнить подобные ситуации в реальной экономической практике, поэтому ограничение в этой части следует записать как строгое неравенство. Поскольку во втором квадранте комплексной плоскости производственных результатов валовая прибыль, откладываемая по оси действительных чисел, становится отрицательной, то это означает работу предприятия в убыток – отрицательная валовая прибыль численно равна валовому убытку предприятия. Отрицательная валовая прибыль (убыток) по своему экономическому смыслу не может быть выше издержек производства: $-G \leq C$. В том случае, когда ни одна единица произведённого товара не реализована, валовая прибыль G численно равна сумме понесённых на производство затрат C, а по знаку становится отрицательной. Именно в этом случае полярный угол производственных результатов становится равным $\frac{3\pi}{4}$. Случай, когда $-G=C$ является редким, но всё же возможным явлением хозяйственной практики.

Поэтому любая модель производственной функции комплексных переменных, в том числе и степенная, должна быть дополнена условиями, налагаемыми на полярные углы комплексных переменных:

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \theta \leq \frac{3\pi}{4} \qquad (6)$$

Однако, в силу периодичности полярных углов, более полно с позиций теории функций комплексного переменного это условие должно выглядеть так:

$$2\pi k < \varphi < 2\pi k + \frac{\pi}{2}, \qquad 2\pi k < \theta \le 2\pi k + \frac{3\pi}{4}.$$

Из всего множества чисел k в силу экономического смысла переменных, будем использовать $k=0$.

Кроме того, стоит определить, как именно находить соответствующие полярные углы комплексных переменных. Для этого вспомним, что главное значение аргумента комплексного числа рассчитывается по формуле:

$$\arg(x+iy) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \mathit{when}\ x > 0, y \ge 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \mathit{when}\ x < 0, y \ge 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{y}{x}, \mathit{when}\ x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2}, \mathit{when}\ x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, \mathit{when}\ x = 0, y < 0. \end{cases}$$

В комплексной переменной $K + iL$ и действительная, и мнимая части всегда больше нуля, поэтому аргумент этого числа всегда будет находиться одинаково – как арктангенс отношения L к K. Однако в другой комплексной переменной: $G + iC$ – прибыль G может не только отсутствовать ($G = 0$), но и быть отрицательной. Суммарные же издержки C не могут быть не положительными. Таким образом полярные углы соответствующих чисел будут находиться так:

$$\varphi = \arg(K + iL) = \operatorname{arctg}\frac{L}{K} \tag{7}$$

$$\theta = \arg\left(G + iC\right) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{C}{G}, when\ G > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{C}{G}, when\ G < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, when\ G = 0. \end{cases} \qquad (8)$$

В теории функций комплексного переменного существует понятие взаимно однозначного или однолистного отображения. Оно определяется так: если функция $z=f(w)$ однозначна на множестве M и при этом двум различным точкам M всегда соответствуют различные точки N, то такое отображение является однолистным.

По экономическому смыслу производственных функций степенная производственная функция комплексных переменных должна быть однолистной. Это означает, что показатель степени b должен быть ограничен так, чтобы крайнему допустимому значению полярного угла производственных ресурсов φ соответствовало крайнее допустимое значение полярного угла производственных результатов θ. Так как для рассматриваемой функции $\theta=b\varphi$, то показатель степени должен удовлетворять условию:

$$0 < b\varphi \le \frac{3\pi}{4} .$$

Если показатель степени будет отрицательным, то есть $b<0$, то любое увеличение производственных ресурсов неминуемо приводит к уменьшению производственных результатов и наоборот – уменьшение трудовых и капитальных ресурсов приводит к увеличению результатов производства. При этом полярный угол производственных результатов становится отрицательным, что означает отрицательность издержек производства – ситуация в экономике невозможная. Поэтому мы рассматриваем только функции с положительными показателями степени.

Для степенной функции с действительными коэффициентами, используемой в качестве модели производственных процессов, рост радиуса и полярного угла комплексной переменной производственных ресурсов (что означает рост трудовых ресурсов в большей степени, чем капитала) будет означать увеличение производственных результатов с опережающим ростом издержек производства над валовой прибылью. Если рассмотреть обратный экономический процесс – рост капитала в большей степени, чем трудовых ресурсов (что на комплексной плоскости производственных ресурсов означает уменьшение полярного угла с одновременным ростом радиуса переменной), то будем иметь вариант увеличения производственных результатов с опережающим ростом валовой прибыли над издержками производства. То есть, конформное отображение степенной комплекснозначной функции с действительными коэффициентами соответствует тому, как изменение рассматриваемых производственных ресурсов влияет на производственные результаты.

Производственную функцию (1) можно представить в тригонометрической форме:

$$G + iC = a\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right)^b \left(\cos\left(b\arg\left(K + iL\right)\right) + i\sin\left(b\arg\left(K + iL\right)\right)\right). \quad (9)$$

Это позволяет нам вывести две простые формулы для нахождения *G* и *C*:

$$G = a\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right)^b \cos\left(b\arg\left(K + iL\right)\right) \quad (10)$$

$$C = a\left(\sqrt{K^2 + L^2}\right)^b \sin\left(b\arg\left(K + iL\right)\right) \quad (11)$$

Одним из примечательных свойств степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами является то, что для нахождения значений коэффициентов функции (1) достаточно иметь лишь одно наблюдение за производственным процессом, поскольку (10) и (11) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными *a* и *b*, найти значения которых можно, используя формулы:

$$b = \frac{\arg(G + iC)}{\arg(K + iL)} \tag{12}$$

$$a = \exp\left(\ln\sqrt{G^2+C^2} - \frac{\arg(G+iC)}{\arg(K+iL)}\ln\sqrt{K^2+L^2}\right) \tag{13}$$

Как можно заметить из (12), коэффициент b характеризует отношение двух общеизвестных экономических показателей - рентабельность по себестоимости $\frac{G}{C}$ и фондовооружённость труда $\frac{K}{L}$. Это обстоятельство даёт возможность рассматривать показатель степени модели в качестве одной из аналитических характеристик предлагаемой модели.

Как было показано выше, коэффициент b не должен быть больше:

$$b_{NQ} = \frac{3\pi}{4\arg(K + iL)}, \tag{14}$$

так как при $b = b_{NQ}$ доход организации становится равным нулю ($Q = G + C = 0$) за счёт того, что в этой точке $G < 0$ и $|G| = C$, а при $b > b_{NQ}$ убыток превышает затраты на производство.

Дополнительные исследования производственной функции (1) показали [1], что при определённых значениях показателя степени b в пределах $(0; b_{NQ})$ прибыль, издержки и доход могут принимать следующие значения:

- Прибыль G становится максимальной, когда:

$$b = b_G = \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\ln\sqrt{K^2 + L^2}}{\arg(K + iL)}\right)}{\arg(K + iL)}. \tag{15}$$

- Прибыль G равна издержкам C (то есть рентабельность по себестоимости равна 1):

$$b = b_{prof} = \frac{\pi}{4\arg(K + iL)}. \tag{16}$$

- Прибыль G равна нулю, когда:

$$b = b_{NG} = \frac{\pi}{2\arg\left(K + iL\right)}. \tag{17}$$

- Доход Q становится максимальным, когда:

$$b = b_Q = \frac{\dfrac{3\pi}{4} - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\arg\left(K + iL\right)}{\ln\sqrt{K^2 + L^2}}\right) - \pi\, l}{\arg\left(K + iL\right)}. \tag{18}$$

- Издержки C становятся максимальными, когда:

$$b = b_C = \frac{\pi\, m - \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\arg\left(K + iL\right)}{\ln\sqrt{K^2 + L^2}}\right)}{\arg\left(K + iL\right)}. \tag{19}$$

Дополнительные исследования показали, что когда $\sqrt{K^2 + L^2} < 1$ в формуле (18) надо использовать l=1, а в формуле (19) надо использовать m=0. В остальных же случаях m=1, l=0.

Если зафиксировать значения затрат ресурсов и задать значение коэффициента a (возьмём для примера $K=L=a=1$), одновременно с этим линейно увеличивая значение коэффициента b, то можно выделить следующие 13 зон и точек, характеризующие разные варианты производства (рис.1):

1. $b \in \left(0; b_G\right)$ – зона высокорентабельного производства: несмотря на рост издержек производства C, растёт и прибыль G, при этом размер C значительно меньше G. Доход Q также растёт.
2. $b = b_G$ – точка максимальной валовой прибыли. В ней прибыль G достигает наибольшего значения. В нашем условном примере это точка $b_G \approx 0,529$.

3. $b \in \left(b_G; b_{prof} \right)$ – производство эффективно, но прибыль G снижается, а издержки C растут. Доход Q продолжает увеличиваться. Рентабельность по себестоимости $\frac{G}{C}$ снижается.
4. $b = 1$ – точка, интересная тем, что в ней K не влияет на C, а L не влияет на G, как видно из формулы (1), $G = aK$, $C = aL$. При этом, как можно заметить, доход организации будет находится по формуле: $Q = a\left(K + L \right)$.
5. $b = b_{prof}$ - точка, в которой рентабельность по себестоимости равна единице. В нашем примере $b_{prof} = 1$.
6. $b \in \left(b_{prof}; b_Q \right)$ – прибыль G снижается, но доход организации Q всё ещё продолжает расти за счёт боле высокого роста издержек производства. Рентабельность меньше 1 и продолжает снижается.
7. $b = b_Q$ – <u>точка максимального дохода</u> организации. В нашем условном примере $b_Q \approx 1{,}529$.
8. $b \in \left(b_Q; b_{NG} \right)$ – производство всё ещё эффективно, несмотря на то, что прибыль G продолжает уменьшаться, а издержки продолжают расти. Доход Q в этом отрезке начинает уменьшаться.
9. $b = b_{NG}$ – <u>точка бесприбыльного производства</u> (известная в экономической теории как «критическая точка»). Здесь $G = 0$, доход Q равен издержкам C. В нашем примере $b_{NG} = 2$.
10. $b \in \left(b_{NG}; b_C \right)$ – неэффективное убыточное производство. Прибыль отрицательна (убыток), но по модулю меньше издержек (то есть, товар приходится продавать по цене, ниже себестоимости), издержки C растут, доход Q уменьшается.

11. $b = b_C$ – <u>точка наибольших издержек</u>. Это точка-экстремум, в которой издержки принимают наибольшее значение, прибыль отрица-

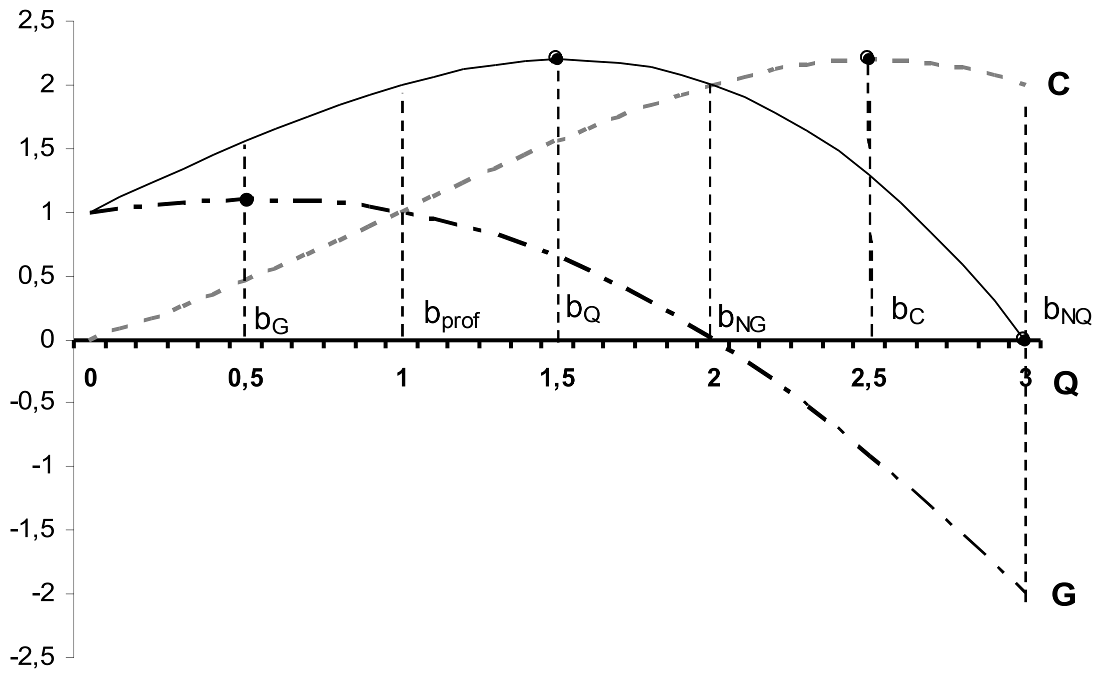

Рисунок 1. Характерные зоны и точки производственной функции (1)

тельная и по модулю меньше издержек, то есть часть продукции реализуется, поэтому убыток по своей величине меньше затрат на производство. В нашем примере $b_C \approx 2{,}529$.

12. $b \in \left(b_C; b_{NQ}\right)$ – производство крайне неэффективно. Издержки, прибыль и доход снижаются, убыток возрастает.

13. $b = b_{NQ}$ – <u>точка отсутствия дохода</u> – точка прекращения производства, так как прибыль G по модулю равна издержкам C, а доход Q равен нулю. То есть, весь объём производства убыточен, не продаётся ни одной единицы продукции. В нашем примере $b_{NQ} = 3$.

Естественно, эти 13 зон и точек мы рассматривали на условном примере, при других значениях K и L некоторые из них могут меняться местами. В частности можно отметить следующие закономерности:

1. По формуле (15) видно, что, когда $\sqrt{K^2 + L^2} = 1$, $b_G = 0$. Если же

$\sqrt{K^2 + L^2}$ становится меньше единицы, то точка b_G становится отрицательной – то есть в данных условиях достичь максимума прибыли невозможно. Заметим, что $\sqrt{K^2 + L^2} \le 1$ лишь тогда, когда значения и K, и L меньше 1. На практике это означает такую ситуацию производства, когда затраты ресурсов (и капитала, и труда) достаточно малы.

2. Кроме того, по формулам (14) – (19) можно заметить: чем меньше аргумент комплексной переменной ресурсов $\arg(K + iL)$, тем больше становятся значения точек и тем ближе они становятся друг к другу. В частности граница b_{NQ} отодвигается вправо – увеличивается интервал, в котором наша функция имеет смысл. Это возможно тогда, когда отношение $\frac{L}{K}$ становится меньше. На практике это означает либо сокращение трудовых затрат, либо увеличение капитальных.
3. В тех же формулах обратим внимание на то, что, когда $\arg(K + iL) = \ln\sqrt{K^2 + L^2}$, становятся равными значения точек: $b_{NG}=b_Q$, $b_C=b_{NQ}$. Когда же $\arg(K + iL) < \ln\sqrt{K^2 + L^2}$, меняются местами точки: b_{NG} с b_Q и b_C с b_{NQ}. Это означает, что максимальный доход достигается в убыток организации.

Эта дополнительная информация позволяет исследователю лучше понять, каков характер производства на предприятии. Однако принципиально важным является то, что по значениям показателя степени b можно судить о состоянии производственного процесса, то есть, производственная функция комплексных переменных (1) может использоваться в аналитических целях. Действительно, для каждой пары значений (K и L) характерны все 13 точек и зон, рассмотренных выше, как характеристики степенной производственной функции с действительными коэффициентами. Подставляя в модель (1) фактические значения результата G и C, определяется фактическое значение показателя степени b, которое находится в одной из 13 зон или точек.

Наличие точки максимума прибыли b_G позволяет получить уникальную характеристику предлагаемой степенной функции комплексных переменных, а именно – определить уровень эффективности производства, воспользовавшись расстоянием фактического значения b до точки b_G. Показатель, отражающий этот уровень, может быть найден по формуле:

$$S = 1 - \frac{b - b_G}{b_{NG} - b_G}. \tag{20}$$

Наши исследования на условных и фактических примерах показали, что этот коэффициент соответствует динамике рентабельности по себестоимости, причем, чем выше рентабельность, тем выше значение показателя и наоборот. Поэтому показателю степени b можно придать экономический смысл уровня эффективности.

Как видно, коэффициент S положителен, когда $b<b_{NG}$, то есть, когда прибыль предприятия положительна. Коэффициент близок к нулю, если значение b близко к b_{NG}, то есть, когда прибыль близка к нулю. S равен нулю только в том случае, когда $b=b_{NG}$. S равен единице тогда, когда значение показателя степени b совпадает со значением b_G. В зоне «высокорентабельного производства» (когда b лежит в границах $\left(0;b_G\right)$) коэффициент S становится больше единицы. Если $b>b_{NG}$, то предлагаемый коэффициент становится отрицательным, что отражает убыточность производства. Коэффициент S для удобства восприятия также можно представить в процентном выражении, просто умножив его значение на 100%.

На значение коэффициента S влияет способ привидения данных затрат труда и капитала к безразмерным величинам, так как на значение точки b_G, как видно из формулы (15), влияет размер K и L. Исследования этой зависимости показали, что приводить данные к безразмерным величинам следует по одной из двух формул, в зависимости от исходного ряда данных [2]:

$$L'_t = \frac{L_t}{L_0},\ K'_t = \frac{K_t}{L_0}, \text{ если } L_0 > K_0 \tag{21}$$

или

$$K'_t = \frac{K_t}{K_0},\ L'_t = \frac{L_t}{K_0}, \text{ если } K_0 > L_0, \tag{22}$$

где K'_t и L'_t - значение капитальных и трудовых затрат в относительных величинах для наблюдения *t*, K_t и L_t - фактические значения капитала и труда для наблюдения *t*, L_0, K_0 - начальные значения трудовых и капитальных затрат.

Используя непосредственно формулы (12), (13), (15) и (17) для каждого года развития некоторой производственной системы, можно анализировать с помощью предложенного коэффициента динамику уровня эффективности её развития. В табл. 1 приведены расчеты коэффициента *S* для экономики России по данным с 1998 по 2003 год и отношение G/C как отражение средней по стране рентабельности.

Таблица 1.

Результаты расчёта уровня эффективности экономики России

Год	1998	1999	2000	2001	2002	2003
S	8,3%	20,7%	23,4%	20,4%	17,8%	18,8%
G/C	12,7%	25,5%	24,7%	18,5%	14,4%	13,5%

Как видно из таблицы, коэффициент S действительно может использоваться как одна из характеристик эффективности производства.

Функция (1) обладает, кроме всего прочего, ещё одним значительным преимуществом по сравнению с производственными функциями действительных переменных – используя её можно вывести *обратную функцию* [3]. По определению построение обратной функции – это вывод такой зависимости $x = F^{-1}(y)$, при которой выполняется равенство $y = F(x)$. Функцию вида $K + iL = F^{-1}(G + iC)$ будем называть *обратной производственной функцией*. Выведем её, а также формулы для нахождения K и L по отдельности для функции (1). Для этого представим левую часть равенства (1) в экспоненциальной форме:

$$\sqrt{G^2 + C^2}\, e^{i\arg(G+iC)} = a(K + iL)^b$$

Далее, проведя элементарные преобразования, получим обратную производственную функцию:

$$K + iL = \left(\frac{\sqrt{G^2 + C^2}}{a}\right)^{\frac{1}{b}} e^{i\frac{\arg(G+iC)}{b}}. \qquad (23)$$

Если теперь правую часть функции (23) представить в тригонометрической форме, то мы получим следующее равенство:

$$K + iL = \left(\frac{\sqrt{G^2 + C^2}}{a}\right)^{\frac{1}{b}} \left(\cos\left(\frac{\arg(G+iC)}{b}\right) + i\sin\left(\frac{\arg(G+iC)}{b}\right)\right), \qquad (24)$$

из которого со всей очевидностью следует, что:

$$K = \left(\frac{\sqrt{G^2 + C^2}}{a}\right)^{\frac{1}{b}} \cos\left(\frac{\arg(G+iC)}{b}\right), \qquad (25)$$

$$L = \left(\frac{\sqrt{G^2 + C^2}}{a}\right)^{\frac{1}{b}} \sin\left(\frac{\arg(G+iC)}{b}\right). \qquad (26)$$

Формулы (25) и (26) позволяют узнать, какими должны быть затраты труда L и основных производственных фондов K для достижения требуемых значений прибыли G и издержек производства C (при сохранении технологии производства). То есть, используя эти формулы, можно проводить многовариантные расчёты с целью планирования производства.

Однако, помня, что по экономическому смыслу задачи $K > 0$ и $L > 0$, необходимо придерживаться ограничений для (25) и (26), которые могут быть выражены так:

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\arg\left(G + iC\right)}{b}\right) > 0 \\ \sin\left(\dfrac{\arg\left(G + iC\right)}{b}\right) > 0 \end{cases}.$$

Это ограничение выполняется только тогда, когда аргумент комплексного результата лежит в пределах:

$$0 < \arg\left(G + iC\right) < b\frac{\pi}{2}. \qquad (27)$$

То есть подставлять в формулы (25) и (26) можно только такие значения прибыли *G* и издержек *C*, которые удовлетворяют ограничению (27).

Что примечательно, используя формулы (25) и (26) также можно построить своеобразные изокванты производственной функции (1). Напомним: изокванты – это кривые, лежащие на плоскости ресурсов, характеризующие различные сочетания труда *L* и капитала *K*, дающие одно и то же значение дохода *Q*. Помня, что $Q = G + C$, меняя значения прибыли *G* и издержек *C* так, чтобы доход оставался постоянным ($Q = G + C = const$), и, подставляя эти значения в формулы (25) и (26), мы получим множество точек, образующие на плоскости ресурсов кривые изоквант.

Если возникает задача нахождения коэффициентов степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами на некотором множестве значений, коэффициенты *a* и *b* функции (1) могут быть найдены с помощью метода наименьших квадратов. Из-за громоздкости вычислений мы опускаем промежуточные выкладки и сразу приведём полученные формулы для нахождения коэффициентов:

$$b = \frac{\sum_t \arg\left(G_t + iC_t\right)}{\sum_t \arg\left(K_t + iL_t\right)}, \tag{28}$$

$$a = \exp\left(\frac{1}{n}\left(\sum_t \ln\sqrt{G_t^2 + C_t^2} - \frac{\sum_t \arg\left(G_t + iC_t\right)}{\sum_t \arg\left(K_t + iL_t\right)}\sum_t \ln\sqrt{K_t^2 + L_t^2}\right)\right). \tag{29}$$

Покажем, как можно построить и использовать для экономического анализа производственную функцию по имеющимся статистическим данным на примере Диатомового комбината города Инзы Ульяновской области (табл. 1) и использовать эту функцию для экономического анализа.

Таблица 2.

Производственная деятельность Диатомового комбината за 2004 – 2007 гг.

	Доход (тыс. руб.)	**Прибыль (тыс. руб.)**	**Затраты (тыс. руб.)**	**ОПФ (тыс. руб.)**	**Число занятых (чел.)**
Квартал	**Q**	**G**	**C**	**K’**	**L’**
1кв. 2004	26731	325	26406	60016	613
2кв. 2004	50232	-1548	51780	61029	587
3кв. 2004	43840	-4380	48220	63544	631
4кв. 2004	46497	-193	46690	69120	636
1кв. 2005	34167	201	33966	70173	638
2кв. 2005	36512	-3	36515	71717	579
3кв. 2005	41027	1687	39340	72689	623
4кв. 2005	54086	609	53477	80192	637
1кв. 2006	41026	1335	39691	80500	643
2кв. 2006	44193	691	43502	80942	608
3кв. 2006	45015	1658	43357	87150	625
4кв. 2006	40893	3698	37195	91543	615
1кв. 2007	42656	2261	40395	92570	583
2кв. 2007	50217	3267	46950	97296	613

Преобразуем эти данные к виду, пригодному для расчётов. При этом к производственным ресурсам будем относить ту их часть, которая непосредственно переносится на готовый продукт – поквартальную стоимость труда и амортизацию основных фондов. Для того чтобы сохранить соотношения между прибылью и издержками, капиталом и трудом, нам нужно приводить их к безразмерным величинам. Для прибыли и издержек важно, чтобы при приведении к безразмерным величинам сохранялся не только смысл каждого из них (G может быть отрицательной, может и отсутствовать), но и другой экономический смысл переменных, поскольку $Q = G + C$. Поэтому, приводя прибыль и издержки к безразмерным величинам, их надо связать друг с другом для возможности вычисления Q. Сделать это можно таким образом:

$$G'_t = \frac{G_t}{C_0},\ C'_t = \frac{C_t}{C_0}, \tag{30}$$

здесь G'_t и C'_t - значение прибыли и издержек в относительных величинах для наблюдения t, G_t и C_t - фактические значения прибыли и издержек для наблюдения t, C_0 - начальное значение издержек. Издержки взяты в качестве делителя потому, что они никогда, ни при каких условиях, не будут меньше нуля, либо равны нулю.

Учитывая то, что в модифицированных данных для первого наблюдения $K<L$, будем приводить данные для капитала и труда по формуле (21).

Приведя указанным образом данные табл. 2 к безразмерным величинам, получим ряд данных, представленный в табл. 3.

Таблица 3.

Безразмерные данные о производственной деятельности Диатомового комбината

Квартал	**G**	**C**	**K**	**L**
1кв. 2004	0,012	1,000	0,326	1,000
2кв. 2004	-0,059	1,961	0,332	0,958
3кв. 2004	-0,166	1,826	0,346	1,029
4кв. 2004	-0,007	1,768	0,376	1,038
1кв. 2005	0,008	1,286	0,382	1,041
2кв. 2005	0,000	1,383	0,390	0,945
3кв. 2005	0,064	1,490	0,395	1,016
4кв. 2005	0,023	2,025	0,436	1,039
1кв. 2006	0,051	1,503	0,438	1,049
2кв. 2006	0,026	1,647	0,440	0,992

3кв. 2006	0,063	1,642	0,474	1,020
4кв. 2006	0,140	1,409	0,498	1,003
1кв. 2007	0,086	1,530	0,503	0,951
2кв. 2007	0,124	1,778	0,529	1,000

Следуя вышеизложенной логике, мы рассчитали значения a, b, b_G, b_{NG}, b_Q и S для каждого наблюдения. Рассчитанные нами значения приведены в табл. 4.

Таблица 4.

Характеристики степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами для Диатомового комбината

Квартал	**a**	**b**	**b$_G$**	**b$_Q$**	**b$_{NG}$**	**S**	**G/C**
1кв. 2004	0,939	1,241	0,032	0,658	1,251	**0,80%**	**1,23%**
2кв. 2004	1,928	1,294	0,009	0,644	1,270	**-1,92%**	**-2,99%**
3кв. 2004	1,643	1,332	0,053	0,683	1,260	**-6,02%**	**-9,08%**
4кв. 2004	1,558	1,288	0,066	0,708	1,284	**-0,28%**	**-0,41%**
1кв. 2005	1,127	1,283	0,069	0,713	1,288	**0,40%**	**0,59%**
2кв. 2005	1,344	1,332	0,016	0,682	1,332	**-0,01%**	**-0,01%**
3кв. 2005	1,335	1,273	0,060	0,715	1,309	**2,86%**	**4,29%**
4кв. 2005	1,728	1,329	0,086	0,756	1,339	**0,78%**	**1,14%**
1кв. 2006	1,272	1,308	0,092	0,760	1,336	**2,30%**	**3,36%**
2кв. 2006	1,476	1,348	0,061	0,742	1,362	**1,06%**	**1,59%**
3кв. 2006	1,403	1,349	0,091	0,782	1,383	**2,60%**	**3,82%**
4кв. 2006	1,218	1,326	0,092	0,799	1,415	**6,75%**	**9,94%**
1кв. 2007	1,383	1,397	0,062	0,787	1,449	**3,72%**	**5,60%**
2кв. 2007	1,502	1,385	0,105	0,829	1,449	**4,77%**	**6,96%**

На основе данных табл. 4 можно сделать вывод о том, что эффективность работы предприятия достаточно низка, но, тем не менее, она растёт от квартала к кварталу (хоть и незначительно). Если сравнить эти данные с данными табл. 3, можно отметить, что росту эффективности способствует привлечение дополнительных инвестиций в основные производственные фонды.

Кроме того, сравнивая динамику коэффициента S с рентабельностью, можно в очередной раз сделать вывод о том, что коэффициент S неплохо характеризует эффективность работы предприятия.

Для последнего наблюдения по Диатомовому комбинату степенная производственная функция комплексных переменных с действительными коэффициентами имеет вид:

$$G + iC = 1,502\left(K + iL\right)^{1,385} \qquad (31)$$

Рассмотрим теперь для этого года, моделируемого производственной функцией (31), какие может получить комбинат прибыль и издержки, если производство усовершенствовать и оно будет максимально эффективно – *S=100%*, то есть, когда $b = b_G = 0,105$. Для этого возьмём те же самые значения ресурсов *K* и *L* за 2 квартал 2007 года и рассчитаем значения *G* и *C* при показателе степени $b = b_G = 0,105$. Получим в относительных величинах:

$$G^* = 1,512,\ C^* = 0,172. \qquad (32)$$

В абсолютных же величинах это будет: $G^* = 39928$ тыс. руб., $C^* = 4544$ тыс. руб. Безусловно тип производства, при котором достижимы такие величины прибыли и затрат является идеальным. Именно поэтому мы рассматриваем эти величины только как направления для возможного развития предприятия. Они показывают, что при существующей технологии производства при более рациональном использовании имеющихся ресурсов Диатомовый комбинат может получить значительно большую прибыль и понести меньшие издержки. Но как это сделать?

Из теории производственных функций известно, что один и тот же объём производства *Q* можно получить, используя различные сочетания производственных ресурсов *K* и *L*. То есть, при существующем на предприятии организационно-экономическом механизме, технологии производства и организации труда, отражаемых моделью (31), сочетания прибыли и затрат на производство, равные *G**=1,512; *C**=0,172, можно добиться, изменяя величины ресурсов *K* и *L*. Воспользуемся для этого формулами (25) и (26). Получим значения капитала и труда, с помощью которых, не меняя ничего другого на предприятии, можно достичь искомых значений прибыли и издержек. В абсолютных величинах они будут равны:

$$K = 5550 \text{ тыс. руб.}, \; L = 455 \text{ тыс. руб.} \qquad (33)$$

Для сравнения стоит отметить, что на 2 квартал 2007 года на Диатомовом комбинате стоимость основных производственных фондов составила 2919 тыс. руб., а средняя заработная плата – 5517 тыс. руб. Можно сделать вывод о том, что ресурсы на предприятии используются неэффективно: для увеличения эффективности производства стоит увеличить инвестиции в основные производственные фонды и сократить затраты на заработную плату. Безусловно, второе не говорит о том, что стоит либо урезать зарплату персоналу, либо увольнять более 500 человек с предприятия! Это лишь свидетельствует о том, что руководству комбината стоит заняться оптимизацией использования трудовых ресурсов, в том числе и изменением пропорции между промышленно-производственным и прочим персоналом комбината.

Следует отметить, что критерий максимума валовой прибыли является основным критерием работы предприятия, но иногда возникают такие конкурентные ситуации на рынке, при которых предприятию во что бы то ни стало необходимо занять лидирующие позиции на рынке по объёму продаж. Это означает, что основным критерием работы предприятия в этом случае является критерий максимума объёма производства. Отдавая себе отчёт в том, что объёмы производства и объёмы продаж – понятия хотя и взаимосвязанные, но всё же разные, мы, тем не менее, в целях упрощения задачи, делаем упор на их близости друг к другу, а не на отличиях, и предположим, что критерию максимума объёма производства соответствует максимум дохода. Тогда можно осуществить аналогичные расчёты по Диатомовому комбинату, но с использованием вместо b_G значения b_Q (то есть, когда $b = b_Q = 0,829$). Получим следующие интересные результаты. Максимум дохода комбината будет составлять $Q=61747$ тыс. руб., но при этом прибыль будет *G=27359* тыс. руб., а издержки составят *C=34387* тыс. руб. Это состояние достижимо при увеличении основных производственных фондов *K* до *4732* тыс. руб. и сокращении зарплаты *L* – до *3590* тыс. руб. То есть, получается, что для достижения максимума дохода, надо также, как и для достижения максимума прибыли увеличивать стоимость основных производственных фондов и сокращать затраты трудовых ресурсов.

Интересно теперь сравнить результаты и рекомендации, полученные с помощью степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами (1) с результатами и рекомендациями, которые следуют при применении в данном случае производственной функции Кобба-Дугласа. Оценив параметры степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами (1) и производственной функции Кобба-Дугласа с помощью МНК по данным Диатомового комбината, мы получили модели следующего вида:

$$G + iC = 1{,}398\left(K + iL\right)^{1{,}319} \tag{34}$$

$$Q = 2{,}348K^{0{,}457}L^{0{,}543} \tag{35}$$

Ошибка аппроксимации дохода по первой модели (34) составила 15,3%, а по второй модели (35) – 14,8%.

Рекомендации, которые можно получить с помощью производственной функции Кобба-Дугласа, заключаются в том, чтобы для увеличения дохода Диатомовый комбинат увеличивал и инвестиции в основные производственные фонды, и численность персонала, причём увеличение численности персонала более желательно, поскольку коэффициент эластичности (35) по труду больше, чем по капиталу. Вычисленное с помощью МНК значение показателя степени при трудовых ресурсах *L* функции Кобба-Дугласа, равное 0,543 говорит о том, что, увеличивая число занятых в производстве на один процент, можно получить увеличение дохода на 0,543%. Итак, если оставить неизменной величину ОПФ за последний год наблюдения в размере 2919 тыс. руб., а лишь увеличивать число работающих на комбинате, то, например, удвоения валового выпуска можно добиться, как следует из функции Кобба-Дугласа (35), увеличивая трудовые ресурсы до 2187 человек (сохраняя текущую заработную плату). Если теперь подставить эти значения ресурсов в нашу функцию (34), то будет промоделирован иной результат, а именно: валовая прибыль будет отрицательной и равной -60499 тыс. руб., издержки производства – равны 191045 тыс. руб., а валовой выпуск составит 130546 тыс. руб. Из чего следует вывод – ни в коем случае не увеличивать численность занятых на комбинате, а наоборот, сократить их число, оптимизируя организацию их труда.

Для получения ответа на вопрос – рекомендации какой из двух моделей ближе к истинному положению дел на комбинате, – мы обратились к руководству самого Диатомового комбината. Генеральный директор комбината к.э.н. Е.А.Никифоров объяснил, что количество занятых на комбинате действительно оказалось излишним – вызвано это тем, что комбинат является градообразующим предприятием. Для снижения уровня социальной напряжённости и уменьшения безработицы руководство и приняло решение обеспечить работой максимально возможное число жителей Инзы. Стратегическим направлением развития комбината считается увеличение инвестиций в основной капитал при сохранении численности занятых, что, как видно из приведённого примера, полностью соответствует выводам и рекомендациям степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами (1).

Обобщая, можно сделать вывод о том, что с помощью степенной производственной функции комплексных переменных с действительными коэффициентами (1) исследователь получает более подробную информацию о сути происходящих производственных процессов, чем та, которую дают производственные функции действительных переменных, поскольку моделируется поведение не одной, а двух действительных переменных, объёдинённых в комплексную переменную.

В статье была рассмотрена одна из возможных производственных функций

– степенная с действительными коэффициентами. Для целей наилучшей аппроксимации и выполнения многовариантных расчётов могут оказаться более пригодными другие разновидности степенной функции. В общем виде степенная производственная функция комплексных переменных с комплексными коэффициентами может быть записана так [4]:

$$G + iC = (a_0 + ia_1)\left(K + iL\right)^{(b_0 + ib_1)}, \qquad (36)$$

и в зависимости от того, какие значения коэффициентов используются, получается несколько разновидностей, одну из которых при $a_1 = b_1 = 0$ мы и рассмотрели в данной статье.

Многообразие возможных производственных функций комплексных переменных вовсе не ограничивается множеством, вытекающим из (36), ведь существуют и другие виды функций комплексных переменных: показательная, логарифмическая, тригонометрическая и др. Кроме того, интересным представляется исследование классифицирующих производственных функций, например, степенной типа Кобба-Дугласа:

$$G + iC = (a_0 + ia_1)\left(K + iK_n\right)^{\alpha}\,(L + iL_n)^{1-\alpha}, \qquad (37)$$

где K – затраты основного капитала,

Kn – затраты не основного капитала,

L – затраты труда основного персонала,

L_n – затраты труда других занятых в производстве.

В любом случае можно утверждать, что использование элементов теории функций комплексного переменного в экономике не только возможно, но и настоятельно необходимо, поскольку существенно расширяет возможности экономико-математического моделирования.

Литература

1. Светуньков С.Г., Светуньков И.С. Производственные функции комплексных переменных: Экономико-математическое моделирование производственной динамики. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008.
2. Светуньков И.С. Проблема размерности в комплекснозначной экономике / Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении: Сборник научных трудов. Выпуск № 17 / Под ред. Д.В. Соколова и В.П. Чернова. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2008
3. Светуньков И.С. Обратные производственные функции комплексного переменного / Экономическая кибернетика: системный анализ в экономике и управлении: Сборник научных трудов. Выпуск № 15 / Под ред. Д.В. Соколова и В.П. Чернова. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2007.
4. Светуньков И.С. Использование комплексных переменных в теории производственных функций / Известия Санкт-Петербургского университета экономики и финансов, 2007, № 4.